Fiche d'exercices sur les dérivées
(du collège à la prépa)

Excellence Maths

www.excellence-maths.fr

Table des matières

1 Niveau Troisième

1.1 Exercices

Exercice 1 – Vitesses moyennes

Un cycliste part de chez lui et suit un trajet rectiligne. Sa distance d (en km) par rapport au point de départ est donnée dans le tableau suivant :

Temps t (h)	0	0,5	1	1,5
Distance d (km)	0	20	45	80

a) Calculer la vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = 0{,}5$.

b) Calculer la vitesse moyenne entre $t = 0{,}5$ et $t = 1$.

c) Calculer la vitesse moyenne entre $t = 1$ et $t = 1{,}5$.

d) Commenter : le cycliste roule-t-il de plus en plus vite, de moins en moins vite, ou à peu près à la même allure ?

Exercice 2 – Pente d'une droite

On considère les points $A(1;2)$ et $B(5;6)$ dans un repère orthonormé.

a) Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).

b) En déduire une équation de (AB).

c) Interpréter le coefficient directeur dans le contexte suivant : l'axe horizontal représente le temps (en heures) et l'axe vertical la distance (en km).

Exercice 3 – Graphique et sens de variation

On sait que la quantité q (en litres) d'eau dans une cuve en fonction du temps t (en minutes) suit approximativement la description suivante :

— de $t = 0$ à $t = 4$, q augmente régulièrement ;

— de $t = 4$ à $t = 7$, q reste pratiquement constante ;

— de $t = 7$ à $t = 10$, q diminue.

a) Décrire qualitativement le graphe de q en fonction du temps.

b) Sur quel(s) intervalle(s) peut-on dire que la cuve se remplit, se stabilise, se vide ?

c) Expliquer en quoi ce type de description prépare le travail sur les dérivées étudiées plus tard.

1.2 Corrigés

Exercice 1.

a) Entre 0 et 0,5 h : la distance passe de 0 à 20 km, donc

$$v_{\text{moy}} = \frac{20-0}{0{,}5-0} = 40 \text{ km/h}.$$

b) Entre 0,5 et 1 h : la distance passe de 20 à 45 km, donc

$$v_{\text{moy}} = \frac{45-20}{1-0{,}5} = \frac{25}{0{,}5} = 50 \text{ km/h}.$$

c) Entre 1 et 1,5 h : la distance passe de 45 à 80 km, donc

$$v_{\text{moy}} = \frac{80-45}{1{,}5-1} = \frac{35}{0{,}5} = 70 \text{ km/h}.$$

d) Les vitesses moyennes sont de plus en plus grandes (40, 50 puis 70 km/h) : le cycliste accélère au fur et à mesure.

Exercice 2.

a) Le coefficient directeur vaut

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-2}{5-1} = \frac{4}{4} = 1.$$

b) Une équation de (AB) est donc $y = x + b$. Comme $A(1;2)$ appartient à la droite,

$$2 = 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Ainsi, une équation de (AB) est $y = x + 1$.

c) Dans le contexte temps/distance, le coefficient directeur 1 représente une vitesse constante de 1 km par unité de temps (ici 1 h).

Exercice 3.

a) Le graphe monte de 0 à 4 (remplissage), est quasi horizontal de 4 à 7 (niveau stable), puis descend de 7 à 10 (vidange).

b) Remplissage sur $[0;4]$, stabilisation sur $[4;7]$, vidange sur $[7;10]$.

c) On décrit ici l'allure d'un graphe et la façon dont une quantité change au cours du temps : c'est exactement le type de question que l'on formalise plus tard avec la dérivée.

2 Niveau Seconde

2.1 Exercices

Exercice 1 – Taux d'accroissement pour x^2

On considère $f(x) = x^2$.

a) Calculer le taux d'accroissement de f entre 1 et 2.

b) Calculer le taux d'accroissement de f entre 1 et 1,5.

c) Comparer les deux résultats et expliquer ce qu'ils suggèrent sur le comportement de f autour de $x = 1$.

Exercice 2 – Pente d'une sécante

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Calculer le taux d'accroissement entre $x = 0$ et $x = 3$.

b) Calculer le taux d'accroissement entre $x = 1$ et $x = 2$.

c) Sur quel segment la sécante est-elle la plus « pentue » ? Comment cela se voit-il sur le calcul ?

Exercice 3 – Modélisation simple

Une entreprise vend un produit. Le bénéfice (en centaines d'euros) en fonction du nombre d'unités vendues x est donné par

$$B(x) = -x^2 + 8x - 7.$$

a) Calculer le taux d'accroissement de B entre $x = 1$ et $x = 3$.

b) Calculer le taux d'accroissement entre $x = 3$ et $x = 5$.

c) Interpréter ces résultats pour l'entreprise : sur quel intervalle l'augmentation des ventes semble-t-elle la plus intéressante ?

2.2 Corrigés

Exercice 1.

a)

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{1} = 3.$$

b)

$$\frac{f(1{,}5) - f(1)}{1{,}5 - 1} = \frac{(1{,}5)^2 - 1}{0{,}5} = \frac{2{,}25 - 1}{0{,}5} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5.$$

c) Le taux d'accroissement diminue (3 puis 2,5) en se rapprochant de $x = 1$ par la droite : cela anticipe le fait que la dérivée de x^2 en 1 vaut 2, entre ces valeurs.

Exercice 2.

a)
$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{(9-9+2)-(0-0+2)}{3}=\frac{2-2}{3}=0.$$

b)
$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{(4-6+2)-(1-3+2)}{1}=\frac{0-0}{1}=0.$$

c) Dans ces deux cas, la sécante est horizontale (taux d'accroissement nul). La courbe associée présente donc sur ces segments une moyenne de croissance nulle.

Exercice 3.

a)
$$\frac{B(3)-B(1)}{3-1}=\frac{(-9+24-7)-(-1+8-7)}{2}=\frac{8-0}{2}=4.$$

b)
$$\frac{B(5)-B(3)}{5-3}=\frac{(-25+40-7)-(-9+24-7)}{2}=\frac{8-8}{2}=0.$$

c) Entre 1 et 3, le bénéfice augmente fortement en moyenne. Entre 3 et 5, la moyenne est nulle : il n'y a plus de gain supplémentaire en moyenne. L'intervalle $[1;3]$ est donc plus intéressant en termes de rentabilité.

3 Niveau Première

3.1 Exercices

Exercice 1 – Calculs de dérivées

Calculer la dérivée des expressions suivantes :

a) $f(x)=3x^2-5x+1$;

b) $g(x)=\frac{2}{x}$ pour $x\neq 0$;

c) $h(x)=\sqrt{x}$ pour $x>0$.

Exercice 2 – Étude d'un trinôme

On considère $f(x)=x^2-4x+5$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Résoudre $f'(x)=0$.

c) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

d) En déduire le minimum de f et son lieu.

Exercice 3 – Cubic et extremums

On considère $f(x)=-x^3+3x^2+1$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Résoudre $f'(x)=0$.

c) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

d) Déterminer les extremums locaux de f.

3.2 Corrigés

Exercice 1.

a) $f'(x) = 6x - 5$.

b) $g(x) = 2x^{-1}$ donc $g'(x) = -2x^{-2} = -\dfrac{2}{x^2}$.

c) $h(x) = x^{1/2}$ donc $h'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 2.

a) $f'(x) = 2x - 4$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

c) Pour $x < 2$, $2x - 4 < 0$ donc f est décroissante ; pour $x > 2$, $2x - 4 > 0$ donc f est croissante.

d) $f(2) = 4 - 8 + 5 = 1$. La fonction admet un minimum égal à 1 atteint en $x = 2$.

Exercice 3.

a) $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

c) On étudie le signe de $-3x(x - 2)$:
   - pour $x < 0$, le produit $x(x - 2)$ est positif, donc $f'(x)$ est négative : f décroît ;
   - pour $0 < x < 2$, le produit $x(x - 2)$ est négatif, donc $f'(x)$ est positive : f croît ;
   - pour $x > 2$, le produit est positif, donc $f'(x)$ est négative : f décroît.

d) $f(0) = 1$ et $f(2) = -8 + 12 + 1 = 5$.
f possède donc un maximum local égal à 5 en $x = 2$ et un minimum local égal à 1 en $x = 0$.

4 Niveau Terminale

4.1 Exercices

Exercice 1 – Dérivées avec exponentielle et logarithme

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

a) $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$;

b) $g(x) = x\mathrm{e}^{2x}$;

c) $h(x) = \ln x - 3\ln(2x)$ pour $x > 0$.

Exercice 2 – Étude de $x\mathrm{e}^{-x}$

On considère $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Résoudre $f'(x) = 0$.

c) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

d) En déduire le maximum de f.

Exercice 3 – Unicité d'une solution

On considère $f(x) = x^3 + 3x + 1$.

a) Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout réel x.

b) En déduire que l'équation $x^3 + 3x + 1 = 0$ admet une unique solution réelle.

c) Justifier que cette solution est comprise entre -1 et 0.

4.2 Corrigés

Exercice 1.

a) $f'(x) = e^x + 2$.

b) $g'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1 + 2x)$.

c) $h(x) = \ln x - 3(\ln 2 + \ln x) = \ln x - 3\ln 2 - 3\ln x = -2\ln x - 3\ln 2$, donc

$$h'(x) = -2 \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}.$$

Exercice 2.

a) $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1 - x) = 0$. Le facteur exponentiel ne s'annule jamais, donc $1 - x = 0$ et $x = 1$.

c) e^{-x} étant toujours positive, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$: positif pour $x < 1$, nul en 1, négatif pour $x > 1$. Donc f croît sur $(-\infty, 1)$ puis décroît sur $(1, +\infty)$.

d) $f(1) = 1 \cdot e^{-1} = e^{-1}$. C'est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

a) $f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$, qui est strictement positif pour tout réel x.

b) La dérivée étant strictement positive, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = 0$ ne peut avoir au plus qu'une solution réelle. Comme f est continue et passe de valeurs négatives à positives (voir la question suivante), elle en a exactement une.

c) $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1) + 1 = -1 - 3 + 1 = -3 < 0$; $f(0) = 1 > 0$. Par continuité, il existe une solution dans l'intervalle $[-1; 0]$. Comme on a montré qu'il n'y en a qu'une, cette solution est unique et se situe entre -1 et 0.

5 Niveau Prépa

5.1 Exercices

Exercice 1 – Fonction avec paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère $f_a(x) = e^x - ax$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer $f'_a(x)$.

b) Montrer que, pour chaque a, l'équation $f'_a(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on exprimera en fonction de a.

c) En déduire la nature (minimum ou maximum) du point critique de f_a.

Exercice 2 – Accroissements finis et encadrement

On considère $f(x) = \ln(1 + x)$ sur $[0; 1]$.

a) Montrer que, pour tout x dans $[0; 1]$, on a

$$\frac{x}{1 + x} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

b) Interpréter ces inégalités à l'aide du calcul différentiel (idée : comparer avec l'approximation affine en 0).

Exercice 3 – Approche de Newton

On étudie la résolution de l'équation $\cos x = x$ sur $[0; 1]$.

a) On pose $g(x) = \cos x - x$. Montrer que g est strictement décroissante sur $[0; 1]$ et que $g(0) > 0$, $g(1) < 0$. En déduire que l'équation admet une unique solution α dans $[0; 1]$.

b) On pose une suite (x_n) définie par $x_0 = 0$ et

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}.$$

Écrire la forme explicite de x_{n+1} en fonction de x_n.

c) Calculer numériquement x_1, x_2, x_3 (à 10^{-3} près) et comparer avec α.

Exercice 4 – Taux d'accroissement et théorème des accroissements finis

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1;3]$ par

$$f(x) = x^2 + 2x.$$

a) Calculer le taux d'accroissement moyen de f entre 1 et 3 :

$$\tau = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}.$$

b) Calculer $f'(x)$ sur $[1;3]$.

c) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe c dans $]1;3[$ tel que $f'(c) = \tau$, puis déterminer explicitement une telle valeur c.

d) Interpréter ce résultat en termes de « vitesse instantanée » et de « vitesse moyenne ».

Exercice 5 – Théorème de Rolle et taux d'accroissement nul

On considère $f(x) = x^3 - 3x$ sur l'intervalle $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

a) Montrer que $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3})$ et interpréter cela comme un taux d'accroissement moyen nul sur l'intervalle considéré.

b) Vérifier que f est continue sur $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ et dérivable sur $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$.

c) En déduire, à l'aide du théorème de Rolle, qu'il existe au moins un réel c dans $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$ tel que $f'(c) = 0$.

d) Calculer $f'(x)$ et déterminer toutes les valeurs de c vérifiant $f'(c) = 0$. Comment interpréter ces valeurs géométriquement ?

5.2 Corrigés

Exercice 1.

a) $f_a'(x) = \mathrm{e}^x - a$.

b) L'équation $\mathrm{e}^x - a = 0$ équivaut à $\mathrm{e}^x = a$. Pour $a > 0$, on obtient $x = \ln a$; si $a \leq 0$, il n'y a pas de solution réelle. Ainsi, pour $a > 0$, f_a' s'annule une unique fois en $\ln a$.

c) $f_a''(x) = \mathrm{e}^x > 0$ pour tout x. En particulier, $f_a''(\ln a) > 0$ lorsque $a > 0$, donc le point critique de f_a en $x = \ln a$ est un minimum.

Exercice 2.

a) Pour x dans $[0;1]$, on a $f(x) = \ln(1 + x)$. On sait que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, qui est comprise entre $\dfrac{1}{2}$ et 1 sur $[0;1]$. En appliquant le théorème des accroissements finis entre 0 et x, il existe c dans $]0;x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = f'(c)\,x.$$

Or $f(0) = 0$ et $\dfrac{1}{1+x} \leq f'(c) \leq 1$. On obtient

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

b) L'approximation linéaire de f en 0 est $x \mapsto x$. Les inégalités montrent que $\ln(1+x)$ est toujours en dessous de cette droite sur $(0;1]$, mais très proche pour les petits x, ce qui justifie l'approximation $\ln(1 + x) \approx x$ lorsque x est petit.

Exercice 3.

a) $g'(x) = -\sin x - 1$, qui est strictement négative sur $[0;1]$, donc g est strictement décroissante. De plus $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$. Par continuité, l'équation $g(x) = 0$ a au moins une solution α dans $[0;1]$, et comme g est strictement décroissante, cette solution est unique.

b) On a $g'(x) = -\sin x - 1$, donc

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1}.$$

c) En pratique, on utilise une calculatrice ou un logiciel ; numériquement, on obtient par exemple :

$$x_1 \approx 0{,}5, \quad x_2 \approx 0{,}739, \quad x_3 \approx 0{,}739 \text{ (stabilisation à } 10^{-3} \text{ près).}$$

La valeur α vérifie $\alpha \approx 0{,}739$.

Exercice 4.

a) On a $f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$ et $f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15$, donc

$$\tau = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{15 - 3}{2} = 6.$$

b) $f'(x) = 2x + 2$.

c) Sur $[1;3]$, f est continue et dérivable, donc le théorème des accroissements finis s'applique : il existe c dans $]1;3[$ tel que

$$f'(c) = \tau = 6.$$

On doit donc résoudre $2c + 2 = 6$, ce qui donne $c = 2$, qui appartient bien à $]1;3[$.

d) La quantité τ mesure la variation moyenne sur $[1;3]$. Le point $c = 2$ est celui où la dérivation instantanée coïncide avec cette moyenne : l'« allure locale » de f à cet endroit est exactement la même que celle qu'on observe en moyenne sur tout le segment.

Exercice 5.

a) On a

$$f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 0,$$

et

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0.$$

Le taux d'accroissement moyen sur $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ vaut donc

$$\frac{f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3})}{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})} = \frac{0 - 0}{2\sqrt{3}} = 0.$$

b) f est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ et l'intervalle ouvert correspondant.

c) Les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées sur $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$: continuité, dérivabilité, et valeurs égales aux extrémités. Il existe donc au moins un réel c dans $]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$ tel que $f'(c) = 0$.

d) On a

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

L'équation $f'(x) = 0$ équivaut à $x^2 - 1 = 0$, donc $x = \pm 1$. Ces deux réels appartiennent à $]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$, il y a donc deux points qui réalisent la conclusion de Rolle. Géométriquement, ce sont les abscisses où la tangente est horizontale, correspondant à un sommet local et à un creux local de la courbe.

Pour aller plus loin sur Excellence Maths

— Cours complet sur les dérivées

— Calcul de dérivées : méthodes et exemples

— Fiche mémo : tableau des dérivées usuelles (PDF)