UHCE 654 J. 26 1114

SESSION 2026

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Paris-PSL – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 4 pages, numérotées de 1 à 4.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Informations importantes

- Les problèmes sont indépendants les uns des autres.
- On peut utiliser les résultats de questions précédentes, en l'indiquant au moment de les utiliser.
- Il est demandé de soigneusement numéroter les questions.
- Il est demandé de mettre les réponses en évidence, en les surlignant, en les encadrant, ou, a minima, en les soulignant. L'utilisation de crayon de papier n'est pas recommandée.
- Il sera fait grand cas de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

Problème A.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Pour tout entier $k \geq 1$, on note $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles $k \times k$, ainsi que I_k la matrice identité de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, on note M^{T} sa matrice transposée.

Partie I. On considère l'application

$$a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}(-y+z),\ \frac{1}{2}(y-z),\ \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,x+y+z)\right) \end{array}$$

Afin de simplifier la lecture et d'éviter les erreurs de calcul, nous conseillons de noter dans tout le problème les matrices sous forme d'un nombre rationnel multiplié par une matrice à coefficients majoritairement entiers, comme par exemple :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \textit{plutôt que} \qquad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

(1)

(1a) Montrer que a est une application linéaire et exprimer la matrice A représentant a dans la base canonique.

(1b) Calculer le noyau $\ker(A)$ de l'application linéaire a.

(1c) Calculer la trace $\mathrm{Tr}(A)$ de la matrice A.

(1d) Donner une valeur propre de a et un vecteur propre associé.

(2)

(2a) Calculer la matrice $P = A^{\mathrm{T}}A$.

(2b) Calculer la matrice $Q = AA^{\mathrm{T}}$.

(2c) Calculer les traces $\mathrm{Tr}(P)$ et $\mathrm{Tr}(Q)$ des matrices P et Q.

(3)

(3a) Montrer que Q est un projecteur.

(3b) Calculer le noyau $\ker(P)$ de l'application linéaire représentée par P.

On fixe dorénavant un entier $k \geq 1$, et on travaille dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. On considère une matrice

$$B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}), \qquad \text{et on définit} \qquad R = B^{\mathrm{T}}B \quad \text{et} \quad S = BB^{\mathrm{T}}.$$

Enfin, on suppose que R est un projecteur et que S est diagonalisable.

(4)

(4a) Exprimer S^3 en fonction de S^2.

(4b) Montrer que S est un projecteur.

(5)

(5a) Montrer que $\ker(R) = \ker(B)$.

(5b) Montrer que les deux matrices B et R ont le même rang.

(5c) Montrer que les deux matrices B et S ont le même rang.

Partie II. On considère deux projecteurs U et W de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ ayant le même rang r, et tels que

$$U^{\mathrm{T}} = U \qquad \text{et} \qquad W^{\mathrm{T}} = W.$$

On considère ensuite une famille orthonormée $(e_1, \ldots, e_r)$ de l'image $\mathrm{Im}(U)$ de l'application linéaire représentée par U. De façon similaire, on considère également une famille orthonormée $(f_1, \ldots, f_r)$ de l'image $\mathrm{Im}(W)$ de l'application linéaire représentée par W.

(6) Montrer qu'il existe des vecteurs $e_{r+1}, \ldots, e_k$ tels que la famille $(e_1, \ldots, e_k)$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^k$.

On choisit de même des vecteurs $f_{r+1}, \ldots, f_k$ tels que la famille $(f_1, \ldots, f_k)$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^k$. Pour tous vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^k$, on note $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ le produit scalaire usuel entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

(7) Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^k$. Montrer que si $\langle f(e_i), e_j \rangle = \langle g(e_i), e_j \rangle$ pour tout $1 \leq i, j \leq k$, alors $f = g$.

On note $\mathbf{0}$ le vecteur nul de $\mathbb{R}^k$ et on définit l'endomorphisme $c : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ par

$$c(e_i) = \begin{cases} f_i & \text{pour } 1 \leq i \leq r \\ \mathbf{0} & \text{pour } r+1 \leq i \leq k \end{cases}.$$

On note $C \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ la matrice représentant c dans la base canonique, ainsi que u l'endomorphisme représenté par U.

(8)

(8a) Pour tout $1 \leq i, j \leq k$, calculer $\langle c(e_i), c(e_j) \rangle$.

(8b) Montrer que $\mathrm{Im}(U) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : u(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$.

(8c) Pour tout $1 \leq i, j \leq k$, calculer $\langle u(e_i), e_j \rangle$.

(8d) En déduire une expression de U en fonction de C.

Problème B.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie I. On fixe un entier $n \geq 2$ et on tire n fois de suite, de façon indépendante, une pièce qui tombe sur le côté « pile » avec probabilité $\dfrac{1}{n}$. Pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note X_k la variable aléatoire valant 1 si la pièce tombe sur « pile » lors du k-ième lancé et 0 sinon.

(9)

(9a) Donner la loi de X_1, son espérance $E[X_1]$ et sa variance $V[X_1]$.

(9b) Calculer la probabilité $P(X_1 = X_2)$.

(9c) Calculer l'espérance $E[2^{X_1}]$.

(9d) Calculer l'espérance $E[2^{X_1 - X_2}]$.

On pose $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(10)

(10a) Donner la loi de S, son espérance $E[S]$ et sa variance $V[S]$.

(10b) Donner le moment d'ordre 2 de S.

(11)

(11a) Calculer la probabilité $P(S = 2)$.

(11b) Calculer la probabilité conditionnelle $P(X_1 = 1 \mid S = 2)$.

(12)

(12a) Calculer l'espérance $E[SX_1]$.

(12b) Calculer le coefficient de corrélation entre X_1 et S. Commenter le résultat.

Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}.$$

(13)

(13a) Calculer $f_n(1)$ et $f_n(-1)$.

(13b) Calculer la limite de $f_n(-1)$ lorsque $n \to \infty$.

(13c) À l'aide de $f_n(1)$ et $f_n(-1)$, exprimer la probabilité p_n que S soit un nombre pair.

(13d) En déduire la limite de p_n lorsque $n \to \infty$.

Partie II. Soit Z une variable aléatoire réelle continue dont la fonction de répartition F_Z est donnée par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(14)

(14a) Vérifier que F_Z est bien une fonction de répartition.

(14b) On note f_Z la densité de Z. Déterminer $f_Z(x)$ pour $x \neq 1$.

(14c) On convient que $f_Z(1) = 1$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Soient $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Z. On définit la variable aléatoire M_n par

$$M_n = \frac{1}{n} \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_n).$$

(15) Calculer la probabilité conditionnelle $P(Z_1 < 2 \mid M_2 < 2)$.

(16)

(16a) Déterminer la fonction de répartition de M_n, notée F_{M_n}.

(16b) Pour quelles valeurs de $n \geq 2$, la variable aléatoire M_n admet-elle une espérance ?

(16c) Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_{M_n}(x)$.

(16d) La fonction F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire ?

Problème C.

On considère la fonction

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2\, e^{-t^2} \end{array}$$

(17)

(17a) Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

(Les sous-questions (17b) et (17c) ne sont pas lisibles sur le document d'origine.)

(17d) Trouver les points d'inflexion de h.

(17e) Tracer le graphe de h, en faisant apparaître la tangente en $t = 0$.

On considère dorénavant la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt.$$

(18)

(18a) Déterminer le domaine de définition de f, que l'on notera $\mathcal{D}_f$, c'est-à-dire l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ est définie.

(18b) Montrer que f est paire.

(19)

(19a) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a l'encadrement $e^{-4x^2} \leq f(x) \leq e^{-x^2}$.

(19b) Déterminer la limite de f à droite en 0.

(19c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(19d) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ est-elle finie (convergente) ? Si oui, en donner un encadrement.

On note H une primitive de h.

(20)

(20a) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, et calculer $xf'(x) + f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

(20b) Dresser le tableau de variation de f.

(21)

(21a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$.

(21b) Soit $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$. Montrer que

$$\frac{1}{x^3} \int_x^{2x} t^2\, \varepsilon(t)\, dt \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } x \to 0.$$

(21c) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f.

(21d) Donner l'allure locale du graphe de f au voisinage de 0 :
En 0, existe-t-il une tangente ? Le cas échéant, quelle est la position du graphe par rapport à celle-ci ? En 0, existe-t-il un point d'inflexion ? Une ébauche de graphe est souhaitée.

(22)

(22a) On fixe $x > 0$. Montrer qu'il existe un unique nombre réel $\alpha_x > 0$ tel que

$$f(x) = e^{-(\alpha_x\, x)^2}.$$

(22b) Montrer que $\alpha_x \in]1, 2[$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère maintenant la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} t^n\, e^{-t^2}\, dt$$

et on admet que son domaine de définition est encore $\mathcal{D}_f$.

(23)

(23a) Étudier la parité de f_n.

(23b) Pour $x \in \mathcal{D}_f$, calculer $f_1(x)$.

(23c) Pour $x \in \mathcal{D}_f$ et $n \geq 2$, trouver une relation de récurrence entre $f_n(x)$ et $f_{n-2}(x)$.

Fin de l'énoncé.