Code sujet : 283

Conception : ESCP BS – HEC Paris

MATHÉMATIQUES 2 APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Vendredi 24 avril 2026 de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations, rappels et définitions spécifiques

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet énoncé sont définies sur cet espace.
- Si Z est une variable aléatoire réelle, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(Z)$ son espérance et $\mathbb{V}(Z)$ sa variance.
- Si Z est une variable aléatoire réelle, on note F_Z la fonction de répartition de Z.
- Si (X, Y) est un couple aléatoire de $\mathbb{R}^2$, on note $F_{(X,Y)}$ la *fonction de répartition* de ce couple *i.e.* la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad F_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]).$$

- Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ et F une fonction définie sur un ensemble qui contient D à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que F est 2-croissante sur D si pour tout couple $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in D^2$ tels que $a_1 \leqslant b_1$ et $a_2 \leqslant b_2$,

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geqslant 0$$

ou encore

$$F(a_1, b_2) + F(b_1, a_2) \leqslant F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

- Si F est 2-croissante sur $\mathbb{R}^2$, on dit plus simplement que F est *2-croissante*.
- Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. On dit que $X = Y$ presque sûrement et on note $X = Y$ ps si $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.
- Etant donné un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, on note $\mathcal{F}_{(a,b)}$ l'ensemble des fonctions continues et croissantes sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$, de classe C^1 sur $]a, b[$, strictement croissantes sur $]a, b[$, de limite nulle en a et de limite égale à 1 en b.

L'énoncé comporte trois parties.
La partie I porte sur des résultats généraux sur les fonctions de répartition de couple.
La partie II s'intéresse aux fonctions 2-croissantes et aux copules 2-dimensionnelles.
La partie III est dédiée au théorème de Sklar *et à quelques exemples.*
Le mot **FIN** *marque la fin de l'énoncé.*

Pour les programmes Python, on dispose d'un petit formulaire à la fin du sujet. On suppose avoir importé des bibliothèques de la façon suivante :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
import scipy.special as sp
```

Toute fonction Python écrite en réponse à une question de l'énoncé peut être utilisée dans les programmes ou fonctions Python demandées par la suite.

Préliminaires

On considère un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

1. Soit $g \in \mathcal{F}_{(a,b)}$. Montrer que la restriction de g à $]a, b[$ réalise une bijection de $]a, b[$ dans $]0, 1[$.
   Par commodité, dans tout le problème, pour toute fonction $g \in \mathcal{F}_{(a,b)}$, on note g^{-1} la réciproque de la restriction de g à $]a, b[$.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f comme densité de probabilité où f est une fonction continue et strictement positive sur $]a, b[$ et nulle en dehors de $]a, b[$.
   Montrer que $F_X \in \mathcal{F}_{(a,b)}$.

I) Fonction de répartition d'un couple : propriétés et exemples.

Soient (X,Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que $\lim\limits_{t\to-\infty} F_{(X,Y)}(t,y)=0$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} F_{(X,Y)}(x,t)=0$.

4. (a) Montrer que $F_X(x)=\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}[X\leqslant x]\cap[Y\leqslant n]\right)$.

   (b) En déduire que $F_X(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}F_{(X,Y)}(x,t)$.

5. Montrer que $F_Y(y)=\lim\limits_{t\to+\infty}F_{(X,Y)}(t,y)$.

6. En déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\lim\limits_{r\to+\infty}F_{(X,Y)}(t,r)\right)=\lim\limits_{r\to+\infty}\left(\lim\limits_{t\to+\infty}F_{(X,Y)}(t,r)\right)=1$.

7. Montrer que $F_{(X,Y)}$ est 2-croissante.

8. (a) Montrer que $F_{(X,Y)}(x,y)\leqslant\min(F_X(x),F_Y(y))$.

   (b) Montrer que $F_{(X,Y)}(x,y)\geqslant\max(F_X(x)+F_Y(y)-1,0)$.

On vient de démontrer le théorème des bornes de FRÉCHET-HOEFFDING :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \max(F_X(x)+F_Y(y)-1,0)\leqslant F_{(X,Y)}(x,y)\leqslant\min(F_X(x),F_Y(y)).$$

On traite dans les questions 9, 10, 11 et 12 un premier exemple.

Soit $]a_1,b_1[$ et $]a_2,b_2[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ avec $-\infty\leqslant a_1<b_1\leqslant+\infty$ et $-\infty\leqslant a_2<b_2\leqslant+\infty$.
Soit $(F_1,F_2)\in\mathcal{F}_{(a_1,b_1)}\times\mathcal{F}_{(a_2,b_2)}$.

On suppose dans cet exemple seulement que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ F_{(X,Y)}(x,y)=\min(F_1(x),F_2(y))$.

9. Montrer que $F_X=F_1$ et $F_Y=F_2$.

10. Notons $U=F_1(X)$ et $V=F_2(Y)$.

    (a) Déterminer les lois de U et V.

    (b) Déterminer la fonction de répartition de (U,V).

    (c) Représenter sur le plan rapporté à un repère $(0,\vec{i},\vec{j})$, l'ensemble
    $$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid\frac{1}{2}\leqslant F_{(U,V)}(x,y)\leqslant\frac{2}{3}\right\}.$$

    (d) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geqslant 2$. Montrer que :
    $$\mathbb{P}\left(U-V>\frac{1}{n}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}\left(\left[\frac{k}{n}<U\leqslant\frac{k+1}{n}\right]\cap\left[V\leqslant\frac{k}{n}\right]\right).$$

    (e) En déduire que $\mathbb{P}(U\leqslant V)=1$ puis $\mathbb{P}(U=V)=1$.

    (f) On suppose que $Y(\Omega)\subset]a_2,b_2[$. Montrer que $X=F_1^{-1}(F_2(Y))$ ps.

11. On suppose que $X(\Omega)\subset]a_1,b_1[$ et $Y(\Omega)\subset]a_2,b_2[$. Montrer qu'il existe deux fonctions g et h croissantes telles que $X=g(Y)$ ps et $Y=h(X)$ ps.

    On dit que les variables X et Y sont *comonotones*.

12. `Python` On suppose que F_1 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et F_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
    Écrire une fonction Python, `Nuage1` qui représente dans $\mathbb{R}^2$, 100 réalisations de (X,Y).

On traite dans les questions 13, 14, 15, 16 et 17 un second exemple.

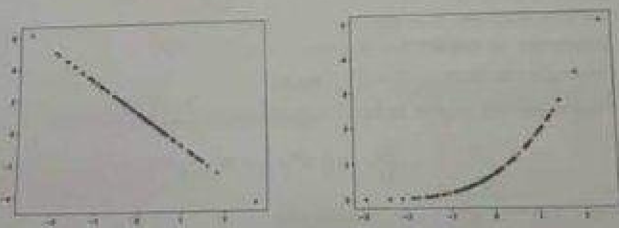
Soit $]a_1, b_1[$ et $]a_2, b_2[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a_1 < b_1 \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant a_2 < b_2 \leqslant +\infty$.
Soit $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}_{(a_1,b_1)} \times \mathcal{F}_{(a_2,b_2)}$
On suppose dans cet exemple seulement que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x,y) = \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0).$$

13. Montrer que $F_X = F_1$ et $F_Y = F_2$.
14. Notons $U = F_1(X)$ et $V = F_2(Y)$.
    (a) Déterminer les lois des variables aléatoires U et $1 - V$ ainsi que la fonction de répartition du couple $(U, 1 - V)$.
    (b) En déduire $\mathbb{P}(U = 1 - V) = 1$.
    (c) On suppose que $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$. Montrer que $X = F_1^{-1}(1 - F_2(Y))$ ps.
15. On suppose que $X(\Omega) \subset]a_1, b_1[$ et $Y(\Omega) \subset]a_2, b_2[$. Montrer qu'il existe deux fonctions g et h décroissantes telles que $X = g(Y)$ ps et $Y = h(X)$ ps.

On dit que les variables X et Y sont *contra-monotones*.

16. **Python** On suppose que F_1 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et F_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 1 et de variance 4.
    Écrire une fonction Python, `Nuage2` qui trace dans $\mathbb{R}^2$, 100 réalisations de (X, Y).
17. Les deux graphes obtenus sont représentés dans la figure ci-dessous, expliquer quel graphe correspond à quel exemple.



(a) `Nuage1` ou `Nuage2` ?   (b) `Nuage1` ou `Nuage2` ?

II) Fonctions 2-croissantes et copules 2-dimensionnelles.

Partie A : Fonctions 2-croissantes

18. Soit $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \max(x,y) \end{array}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
    (a) Montrer que $t \mapsto f_1(t, y_0)$ et $t \mapsto f_1(x_0, t)$ sont croissantes.
    (b) Montrer que f_1 n'est pas 2-croissante.
19. Soit $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$.

(a) Montrer que f_2 est 2-croissante.

(b) Montrer qu'il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $t \mapsto f_2(t, y)$ ne soit pas croissante.

20. Que déduire des deux questions précédentes ?

21. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2, 2-croissante sur $I \times J$.

(a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\partial^2_{1,2} F(x, y) = \lim_{h \to 0} \left(\lim_{t \to 0} \frac{F(x+h, y+t) - F(x+h, y) - F(x, y+t) + F(x, y)}{ht} \right).$$

(b) En déduire que $\forall (x, y) \in I \times J,\ \partial^2_{1,2} F(x, y) \geqslant 0$.

22. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2.

(a) Soit $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in (I \times J)^2$ tel que $a_1 \leqslant b_1$ et $a_2 \leqslant b_2$. Montrer que :

$$F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial^2_{1,2} F(x, y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

(b) En déduire que F est 2-croissante sur $I \times J$ si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I \times J, \quad \partial^2_{1,2} F(x, y) \geqslant 0.$$

23. Soit F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, 2-croissante telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{t \to -\infty} F(t, y) = \lim_{t \to -\infty} F(x, t) = 0.$$

Montrer que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les fonctions $t \mapsto F(t, y)$ et $t \mapsto F(x, t)$ sont croissantes.

Partie B : Copule 2-dimensionnelle

Définition. *Une copule C est une fonction à valeurs réelles, définie sur $[0, 1]^2$, 2-croissante sur $[0, 1]^2$ telle que :*

$$\forall x \in [0, 1],\ C(0, x) = C(x, 0) = 0 \text{ et } C(1, x) = C(x, 1) = x.$$

On admet le théorème suivant :

Théorème. *Si C est une copule alors il existe un couple aléatoire (U, V), à valeurs dans $[0, 1]^2$, tel que C est la fonction de répartition restreinte à $[0, 1]^2$ de ce couple.*

On dit que le couple (U, V) est associé à la copule C.

Soit C une copule et (U, V) un couple aléatoire associé à C.

24. Déterminer les lois de U et V.

25. On définit

$$C^* : \begin{array}{rcl} [0, 1]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & u + v - 1 + C(1-u, 1-v) \end{array}$$

Montrer que C^* est une copule.

C'est la *copule de survie* associée à C.

26. Soit C une copule.

(a) Montrer que :

$$\forall v \in [0,1], \forall u_1, u_2 \in [0,1], u_1 \leqslant u_2 \Rightarrow 0 \leqslant C(u_2, v) - C(u_1, v) \leqslant u_2 - u_1$$

et

$$\forall u \in [0,1], \forall v_1, v_2 \in [0,1], v_1 \leqslant v_2 \Rightarrow 0 \leqslant C(u, v_2) - C(u, v_1) \leqslant v_2 - v_1.$$

(b) En déduire que :

$$\forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0,1]^2, |C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leqslant |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

(c) Montrer que C est continue sur $[0,1]^2$.

III) Démonstration du théorème de SKLAR et application.

Partie A : le théorème

Soient $]a,b[$ et $]c,d[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$.
Soit (X,Y) un couple aléatoire tel que $(F_X, F_Y) \in \mathcal{F}_{(a,b)} \times \mathcal{F}_{(c,d)}$.

27. Posons

$$C : \begin{array}{ccl} [0,1]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(y)) & \text{si } (x,y) \in]0,1[^2 \\ x & \text{si } y = 1 \\ y & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

(a) Montrer que pour tous $(x,y) \in]0,1[^2$. On a :

$$C(x,y) = \mathbb{P}([F_X(X) \leqslant x] \cap [F_Y(Y) \leqslant y]).$$

Montrer que cette formule reste valide pour tous $(x,y) \in [0,1]^2$.

(b) En déduire que C est 2-croissante sur $[0,1]^2$.

(c) En déduire que C est une copule.

28. Montrer qu'il existe une unique copule C telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, F_{(X,Y)}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)).$$

On dit que C est la *représentation copule* de $F_{(X,Y)}$. Ce dernier résultat est le théorème de SKLAR. On admettra la réciproque :

Théorème. *Soit C une copule, F_1 et F_2 deux fonctions de répartition de variable aléatoire réelle à densité. La fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & C(F_1(x), F_2(x)) \end{array}$ est la fonction de répartition d'un couple aléatoire (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.*

29. Soit C une copule, F_1 et F_2 deux fonctions de répartition de variable aléatoire réelle à densité et F la fonction de répartition du couple (X_1, X_2) définie par :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \end{array}$$

Montrer que $F_{X_1} = F_1$ et $F_{X_2} = F_2$.

Partie B : un premier exemple, la distribution logistique bivariée de Gumbel.

Soit (Z_1, Z_2) un couple aléatoire de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F_{(Z_1,Z_2)}(x,y) = \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}}.$$

30. Montrer que Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires réelles à densité et déterminer une densité pour chaque variable.
31. Déterminer la représentation copule de F. Cette copule est appelée copule logistique de Gumbel.

Partie C : un deuxième exemple, la famille des copules de Gumbel-Barnett.

Soit $\theta \in [0,1]$. On définit

$$C_\theta : \begin{array}{ccl} [0,1]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \begin{cases} uve^{-\theta \ln(u)\ln(v)} & \text{si } (u,v) \in]0,1]^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Soit $(u_1, v_1) \in]0,1]^2$.

32. Soit $g : \begin{array}{ccl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \theta^2 \ln(u_1)\ln(v_1) - \theta(1+\ln(u_1)+\ln(v_1)) + 1 \end{array}$

    (a) Dresser les tableaux de variation de g selon les valeurs de

    $$\theta_* = \frac{1+\ln(u_1)+\ln(v_1)}{2\ln(u_1)\ln(v_1)}.$$

    (b) Montrer que g est toujours positive.
33. Montrer que C_θ est C^2 sur $]0,1]^2$ et est 2-croissante sur $]0,1]^2$.
34. Montrer que C_θ est 2-croissante sur $[0,1]^2$.
35. Montrer que C_θ est une copule.
36. Soit (X,Y) un couple aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de fonction de répartition

$$F_{(X,Y)} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-2y})e^{-\ln(1-e^{-x})\ln(1-e^{-2y})} & \text{si } (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Déterminer les lois de X et de Y.

I. Simulations probabilistes

```
[illegible]
```

[illegible]	Simule une réalisation d'une matrice aléatoire de dimension (q, r) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{B}(N, p)$
[illegible]	Simule une réalisation d'un vecteur ligne aléatoire de taille n dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{B}(N, p)$.
[illegible]	Simule une réalisation d'une matrice aléatoire de dimension (q, r) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{E}(\frac{1}{a})$
[illegible]	Simule une réalisation d'un vecteur ligne aléatoire de taille n dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{E}(\frac{1}{a})$.
[illegible]	Simule une réalisation d'une matrice aléatoire de dimension (q, r) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$
[illegible]	Simule une réalisation d'un vecteur ligne aléatoire de taille n dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$
[illegible]	Simule une réalisation d'une matrice aléatoire de dimension (q, r) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{U}([a, b])$.
[illegible]	Simule une réalisation d'un vecteur ligne aléatoire de taille n dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{U}([a, b])$.

Si le paramètre (q, r) est omis, elles renvoient un seul coefficient suivant les mêmes contraintes.

Pour obtenir la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite, on utilise la bibliothèque scipy :

```
[illegible]
```

[illegible]	renvoie $\Phi(x)$
[illegible]	renvoie $\Phi^{-1}(p)$

II. Graphiques

```
[illegible]
```

[illegible]	Génère la courbe des points définis par les listes X et Y, linestyle permet de relier ou non les points et marker est la marque des points.
[illegible]	Affiche le graphique

FIN