Code sujet : 282

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESSEC BS – HEC Paris

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Jeudi 23 avril 2026 de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et tout $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!]$ le coefficient sur la i-ème ligne et la j-ème colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est noté $A_{i,j}$.
- La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$. Lorsque $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a.
- Pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\delta_{i,k}$ désigne le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{O}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^tM = I_n\}$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une permutation de $[\![1;n]\!]$ est une bijection de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$. On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble de toutes les permutations de $[\![1;n]\!]$.
  Si σ est une permutation de $[\![1;n]\!]$, on représente σ par le n-uplet $(\sigma(1), \cdots, \sigma(n))$. Par exemple, dans le cas $n = 3$, $(2,3,1)$ représente la permutation σ de $\{1,2,3\}$ définie par : $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 1$.
- Pour tout $\sigma \in \mathscr{P}_n$ et pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $x_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$.
- Pour tout $\sigma \in \mathscr{P}_n$, on appelle matrice de permutation associée à σ et on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2,\ (P_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

- On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- On dit que $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation s'il existe $\sigma \in \mathscr{P}_n$ telle que $P = P_\sigma$.
  L'ensemble des matrices de permutations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathbb{P}_n$.
- Pour tous $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\langle U, V\rangle$ le produit scalaire canonique de U et V défini par

$$\langle U, V\rangle = {}^tUV = {}^tVU.$$

  On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire définie par :

$$\|U\| = \sqrt{\langle U, U\rangle} \text{ pour tout } U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

- Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note
  - $\operatorname{diag}(A) = \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ \vdots \\ A_{n,n} \end{pmatrix}$ le vecteur colonne défini à partir de la diagonale de la matrice A.
  - $\operatorname{DG}(A) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$ la matrice *diagonale* de même diagonale que A.

- Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{D}(X) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}$ la matrice *diagonale* de diagonale X.
- Soit E un espace vectoriel et g une application de E dans $\mathbb{R}$. On dira que g est **convexe** si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall t \in [0,1], \ g(tx + (1-t)y) \leqslant tg(x) + (1-t)g(y).$$

- Dans tout le problème si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on donnera un sens à $f(X)$ en posant $f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$.
- Pour les programmes Python, on dispose d'un petit formulaire à la fin du sujet. On importe aussi les bibliothèques suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

  Toute fonction Python écrite en réponse à une question de l'énoncé peut être utilisée dans les programmes ou fonctions Python demandés par la suite.

L'énoncé comporte quatre parties I, II, III et IV. Le mot **FIN** marque la fin de l'énoncé.

Partie I : préliminaires

1. Soient $\sigma \in \mathscr{P}_n$ et ϕ_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P_σ.
   Montrer que $\forall j \in [\![1;n]\!] \ \phi_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.
2. Soient $\sigma \in \mathscr{P}_n$ et $\tau \in \mathscr{P}_n$. Montrer que $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$ et en déduire que l'inverse d'une matrice de permutation est aussi une matrice de permutation.
3. Montrer que toute matrice de permutation $P \in \mathbb{P}_n$ est orthogonale.
4. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ il existe $\alpha \in \mathscr{P}_n$ tel que

$$x_{\alpha(1)} \geqslant \cdots \geqslant x_{\alpha(n)} \tag{1}$$

5. Soient $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathscr{P}_n$ tels que $x_{\alpha(1)} \geqslant \cdots \geqslant x_{\alpha(n)}$ et $x_{\beta(1)} \geqslant \cdots \geqslant x_{\beta(n)}$.
   Montrer que

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \ x_{\alpha(i)} = x_{\beta(i)}.$$

Dans toute la suite, pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\hat{x} = (\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n)$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \ \hat{x}_i = x_{\alpha(i)},$$

où $\alpha \in \mathscr{P}_n$ est choisi tel que $x_{\alpha(1)} \geqslant \cdots \geqslant x_{\alpha(n)}$ (autrement dit, $\hat{x}_1 \geqslant \cdots \geqslant \hat{x}_n$ sont les composantes $x_1, \cdots, x_n$ réordonnées dans l'ordre décroissant).

6. On écrit une fonction Python ayant comme entrée un tableau monodimensionnel de réels `X` (représentant un vecteur) et qui renvoie un tableau `Y` contenant les mêmes valeurs que `X` ordonnées dans l'ordre décroissant et une permutation α correspondant à la question 4.

   Compléter la fonction Python suivante afin que la fonction `permutevecteur()` ayant comme entrée un tableau de valeurs `X` renvoie le couple `(Y, alpha)` ainsi obtenu.
   On reproduira cette fonction sur la copie en remplissant les parties pointillées.

```
def permutevecteur(X):
    n=len(X)
    alpha=np.arange(0,n,1)
    Y=X.copy() # Y est un nouveau tableau initialisé avec les valeurs de X
    for i in range(n):
        imax=...
        for k in range(i,n):
            if Y[k] >...:
                imax=...
        if imax>i :
            ... , ... = ... , ...
            alpha[i],alpha[imax]=alpha[imax],alpha[i]
    return Y,alpha
```

Partie II : matrices bistochastiques
Théorème de Birkhoff-Von Neumann en basses dimensions

Définitions

- On dit qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bistochastique si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

  (a) $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ S_{i,j} \geqslant 0$,

  (b) $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} S_{i,j} = 1$,

  (c) $\forall j \in [\![1;n]\!],\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_{i,j} = 1$.

- On dit qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthostochastique s'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{O}_n$ telle que
$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad S_{i,j} = (Q_{i,j})^2 .$$

L'un des objectifs de cette partie est de prouver le théorème suivant quand $n \in \{2,3\}$:

Théorème de Birkhoff-Von Neumann. *Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique. Il existe un entier naturel k non nul, des matrices de permutation $P_1, \cdots, P_k \in \mathbb{P}_n$ et des réels positifs $a_1, \cdots, a_k$ tels que $a_1 + \cdots + a_k = 1$ et $S = a_1P_1 + \cdots + a_kP_k$.*

7. (a) Montrer que toute matrice orthostochastique et toute matrice de permutation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont bistochastiques.

(b) Montrer qu'une matrice bistochastique n'est pas toujours orthostochastique en donnant un exemple pour $n = 3$.

8. On se place dans le cas particulier $n = 2$.

   (a) Trouver toutes les matrices de permutation appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) En déduire qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est bistochastique si et seulement s'il existe $\alpha \in [0,1]$ et $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice de permutation tels que

$$S = \alpha I_2 + (1-\alpha)P.$$

9. On se place dans le cas particulier $n = 3$. Soit $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique.

   (a) Quel est le nombre de permutations de $\{1, 2, 3\}$?

   (b) Montrer que les matrices suivantes sont des matrices de permutation et indiquer les bijections σ associées :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (c) Montrer que S est de la forme

$$S = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & 1 - S_{1,1} - S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & 1 - S_{2,1} - S_{2,2} \\ 1 - S_{1,1} - S_{2,1} & 1 - S_{1,2} - S_{2,2} & S_{3,3} \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

   Exprimer $S_{3,3}$ en fonction des coefficients $S_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$ et donner des conditions nécessaires sur ces coefficients $S_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$.

   (d) Ces conditions étant satisfaites, on pose $\beta_0 = \min_{1 \leqslant i \leqslant 3} S_{i,i}$.

   Montrer qu'il existe des réels positifs β_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, tels que :

$$S = \beta_0 I_3 + \sum_{i=1}^{5} \beta_i P_i.$$

   (e) Conclure.

10. Ecrire une fonction **Python** `bistochastique(n,iter)` ayant deux paramètres d'entrée `n` et `iter`, représentant des entiers naturels non nuls, et qui renvoie une matrice bistochastique construite de la manière suivante :

   — on construit au départ une matrice $A^{(0)}$ de taille $\mathtt{n} \times \mathtt{n}$ dont chaque coefficient $a_{i,j}^{(0)}$ est obtenu en simulant une réalisation de la loi uniforme sur $]0,1[$,

   — pour $0 \leqslant k <$ `iter` :

   - on calcule la matrice $A^{(2k+1)}$ obtenue à partir de la matrice $A^{(2k)}$ en divisant chaque ligne de $A^{(2k)}$ par la somme de ses coefficients :

$$A_{i,j}^{(2k+1)} = \frac{A_{i,j}^{(2k)}}{\sum_{\ell=1}^{\mathtt{n}} A_{i,\ell}^{(2k)}}, \quad \text{pour } 1 \leqslant i, j \leqslant \mathtt{n}.$$

 Tourner la page SVP

- on calcule ensuite la matrice $A^{(2k+2)}$ obtenue à partir de la matrice $A^{(2k+1)}$ en divisant chaque colonne par la somme de ses coefficients :

$$A_{i,j}^{(2k+2)} = \frac{A_{i,j}^{(2k+1)}}{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} A_{\ell,j}^{(2k+1)}}, \quad \text{pour } 1 \leqslant i,j \leqslant \mathtt{n}.$$

- La fonction renvoie la dernière matrice $A^{(2k+2)}$ obtenue quand $k = \mathtt{iter} - 1$. On admet que si `iter` est assez grand, on peut considérer que cette matrice est bistochastique.

Partie III : fonctions symétriques et fonctions S-convexes

On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2.
On admet que le théorème de Birkhoff-Von Neumann énoncé dans la partie II est vrai en dimension n.

- On pose $H_n = \{y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n\}$.
- On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est **symétrique** si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et toute permutation $\sigma \in \mathscr{P}_n$ on a $f(x) = f(x_\sigma)$.
- On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est S-convexe si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et toute matrice bistochastique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $f(BX) \leqslant f(X)$.

11. Soient $\sigma \in \mathscr{P}_n$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Déterminer $P_\sigma X$.
12. Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Montrer que f est **symétrique** si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall P \in \mathbb{P}_n$, $f(PX) = f(X)$
13. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est symétrique si et seulement s'il existe une fonction $\hat{f}$ de H_n dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \hat{f}(\hat{x}).$$

14. Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elle est symétrique ou non en le prouvant si la réponse est oui, ou en donnant un contre-exemple si la réponse est non :

$$\begin{aligned} f_1 &: (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k, \\ f_2 &: (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_1^2 + x_2 + \cdots + x_n, \\ f_3 &: (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |x_i - x_j|. \end{aligned}$$

15. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symétrique de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathscr{P}_n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On définit

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad g_{i,x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x + te_i) \end{array}.$$

Soit $i \in [\![1;n]\!]$.

(a) Montrer que g_i est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

(b) Montrer que $g_{i,x_\sigma} = g_{\sigma(i),x}$.

(c) En déduire que tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\partial_i f(x_\sigma) = \partial_{\sigma(i)} f(x).$$

16. Montrer que toute fonction S-convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est symétrique.

17. Soient E un espace vectoriel et g une application de E dans $\mathbb{R}$ convexe. Montrer que pour tous $z_1, \cdots, z_m \in E$, $m \in \mathbb{N}^*$, et tous réels positifs $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$ on a l'inégalité

$$g(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k z_k) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k g(z_k).$$

18. En déduire que toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symétrique et convexe est S-convexe .

19. On se place dans le cas particulier $n = 2$. Soit f une fonction S-convexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$g(t) = f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)x_2 + tx_1) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f, de t, x_1 et x_2.

(b) Montrer que $g(t) \leqslant g(0)$ pour tout $t \in [0, 1]$. En déduire que $g'(0) \leqslant 0$.

(c) En déduire que

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1 - x_2)(\partial_1 f(x) - \partial_2 f(x)) \geqslant 0.$$

20. On revient au cas général où $n \geqslant 2$ est quelconque mais fixé. Soit f une fonction S-convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que pour tous $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ on a

$$\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ (x_i - x_j)(\partial_i f(x) - \partial_j f(x)) \geqslant 0.$$

21. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} h(x_k) \end{array}.$$

Montrer que f est S-convexe si et seulement si h est convexe.

Partie IV : fonctions spectrales. Théorèmes de Davis et de Fan.

Dans toute cette partie, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées symétriques appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on note $\hat{\lambda}(A)$ le vecteur colonne défini par : $\hat{\lambda}(A) = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1(A) \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_n(A) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

où $\hat{\lambda}_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \hat{\lambda}_n(A)$ désignent les valeurs diagonales, d'une matrice diagonale semblable à A, ordonnées dans un ordre décroissant.

On pose $\Lambda(A) = \mathrm{D}(\hat{\lambda}(A))$.

On dit qu'une application G de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est **spectrale** si elle vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall Q \in \mathcal{O}_n,\ G(QA\,{}^tQ) = G(A).$$

Dans toute la suite, F désigne une application de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ fixée (pas nécessairement spectrale, sauf indication contraire).

Tourner la page SVP

22. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $F_k \ : \ A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{Tr}(A^k)$ est spectrale.
23. Soit σ une permutation de $\{1, \cdots, n\}$. Montrer que
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ P_\sigma\, \mathrm{D}(X)\, {}^tP_\sigma = \mathrm{D}(P_\sigma X).$$
24. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale Q telle que
$$A = Q\Lambda(A)^tQ.$$
25. On suppose dans cette question que F est spectrale.
On associe à F la fonction $f \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = F\left(\mathrm{D}(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})\right)$$
(a) Montrer que
$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ F(A) = F(\Lambda(A)).$$
(b) Montrer que f est symétrique.
(c) Montrer que si F est convexe alors f est convexe aussi.
26. On revient au cas général.
Montrer que F est spectrale si et seulement s'il existe une fonction symétrique $f \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ F(A) = f(\hat{\lambda}(A))$.
Prouver que f est unique.
27. On suppose maintenant que F est spectrale et que f est convexe (où f est la fonction associée à F définie dans la question 26). On voudrait démontrer que F est convexe (Théorème de Davis).
(a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ bistochastique telle que
$$\operatorname{diag}(A) = S\hat{\lambda}(A).$$
(b) Soient deux matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $C = A + B$. Montrer qu'il existe deux matrices bistochastiques $S_1, S_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\hat{\lambda}(C) = S_1\hat{\lambda}(A) + S_2\hat{\lambda}(B).$$
(c) En déduire que F est convexe.
(d) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$$F(\mathrm{DG}(A)) \leqslant F(A).$$
28. Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et tout $m \in [\![1;n]\!]$, on pose $\Sigma_m(A) = \sum_{k=1}^{m} \hat{\lambda}_k(A)$.
(a) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $m \in [\![1;n]\!]$ et $V_1, \cdots, V_n$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $AV_i = \hat{\lambda}_i(A)V_i$.
On pose $C = A + B$ et on note $X_1, \cdots, X_n$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $CX_i = \hat{\lambda}_i(C)X_i$.
Montrer pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, les deux inégalités :
$$\langle X_k, AX_k\rangle \leqslant \hat{\lambda}_m(A) + \sum_{i=1}^{m-1}(\hat{\lambda}_i(A) - \hat{\lambda}_m(A))\langle X_k, V_i\rangle^2, \tag{3}$$
$$\sum_{k=1}^{m}\langle X_k, AX_k\rangle \leqslant \Sigma_m(A). \tag{4}$$

(b) En déduire que les fonctions Σ_m sont toutes convexes.

29. Soit $H : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de la forme $H(A) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \hat{\lambda}_k(A)$ où $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont des réels donnés tels que $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n \geqslant 0$.
Montrer que H est spectrale et convexe.
Indication : on peut exprimer $H(A)$ en fonction de $\Sigma_1(A), \cdots, \Sigma_n(A)$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}$ l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\hat{x}_i = x_{\alpha(i)}$, où $\alpha \in \mathscr{S}_n$ est choisi tel que $x_{\alpha(1)} \geqslant \cdots \geqslant x_{\alpha(n)}$ (autrement dit, $\hat{x}_1 \geqslant \cdots \geqslant \hat{x}_n$ sont les composantes X réordonnées dans l'ordre décroissant).

30. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose $U = \mathrm{diag}(A)$ et $V = \mathrm{diag}(B)$.
Montrer que $\langle \hat{U}, \hat{V} \rangle \leqslant \langle \hat{\lambda}(A), \hat{\lambda}(B) \rangle$ (Inégalité de Fan).

I. Mathématiques générales

`np.linspace(a,b,n)`	Crée une matrice ligne de n valeurs uniformément réparties entre a et b (inclus).
`np.zeros([n,m])`	Crée la matrice nulle de taille $n \times m$.
`np.zeros([n])`	Crée la matrice ligne nulle de taille n.
`np.arange(a,b,eps)`	Renvoie la liste des flottants de a à b (b non compris) de pas constant `eps`.
`np.shape(M)`	Donne la taille de la matrice M sous forme d'un tuple (couple).
`np.transpose(M)`	Renvoie la transposée de M.
`np.dot(M,P)` `M.dot(P)` `M @ P`	3 instructions synonymes, évaluent le produit matriciel MP.
`np.sum(M)`	Renvoie la somme de tous les éléments de M.
`np.sum(M, axis = i)`	Renvoie un vecteur ligne des sommes de chaque colonne de M si $i = 0$ et des sommes de chaque ligne de M si $i = 1$.

II. Algèbre linéaire

`nl.inv(M)`	Renvoie l'inverse de la matrice M.
`nl.matrix_rank(M)`	Renvoie le rang de la matrice M.
`nl.matrix_power(M,n)`	Renvoie la n-ième puissance de la matrice M.

III. Simulations probabilistes

`rd.random([q,r])`	Simule une réalisation d'une matrice aléatoire de dimension (q, r) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{U}([0, 1[)$.
`rd.normal(m,d,[q,r])` `rd.normal(m,d,n)`	Simule une réalisation d'une matrice (resp. d'un vecteur) aléatoire de dimension (q, r) (resp. n) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{N}(m, d^2)$.
`rd.gamma(m,a,[q,r])` `rd.gamma(m,a,n)`	Simule une réalisation d'une matrice (resp. d'un vecteur) aléatoire de dimension (q, r) (resp. n) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\Gamma(m, \alpha)$.

IV. Graphiques

`plt.plot(X,Y,options)`	Génère la courbe des points définis par les listes X et Y suivant les options graphiques définies par la chaîne de caractère `options`.
`plt.grid()`	Affiche le quadrillage.
`plt.show()`	Affiche le graphique.

FIN