BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : BSB

—

MATHÉMATIQUES T

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

Vendredi 24 avril 2026 de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Dans cet exercice, on s'intéresse à une famille de fonctions f_n définies pour tout entier naturel n et tout réel x par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{1-x}$.

Partie I : Quelques exemples :

(1) Étude des variations de la fonction f_1 définie pour tout réel x par $f_1(x) = xe^{1-x}$.

(a) Calculer la dérivée de f_1.

(b) En déduire le sens de variation de f_1.

(c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_1''(x) = (x-2)e^{1-x}$.
En déduire que f_1 admet exactement un point d'inflexion et donner ses coordonnées.

(2) Étude des limites de f_1.

(a) Rappeler $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$ et en déduire la limite de f_1 en $-\infty$.

Tournez la page SVP

(b) Montrer que, pour tout réel x, on a $f_1(x) = e\dfrac{x}{e^x}$.

(c) En utilisant les croissances comparées, en déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

(3) Dresser le tableau de variations de f_1 en y faisant figurer les limites calculées dans la question précédente.

(4) Étude des variations de la fonction f_2 définie pour tout réel x par $f_2(x) = \dfrac{x^2}{2}e^{1-x}$.

(a) Calculer la dérivée de f_2.

(b) En déduire le sens de variation de f_2.

(5) Étude des limites de f_2.

(a) Calculer la limite de f_2 en $-\infty$.

(b) Par une méthode analogue à celle de la question 2.c, calculer la limite de f_2 en $+\infty$.

(6) Dresser le tableau de variations de f_2 en y faisant figurer les limites calculées dans la question précédente.

Partie II : Quelques utilisations de l'informatique.

On admet que les librairies `numpy` et `matplotlib.pyplot` ont été importées avec les commandes suivantes :`import numpy as np` et `import matplotlib.pyplot as plt`.

(7) Recopier et compléter la fonction `fact(n)` de la variable n, entier naturel, suivante de telle sorte qu'elle renvoie la valeur de $n!$.

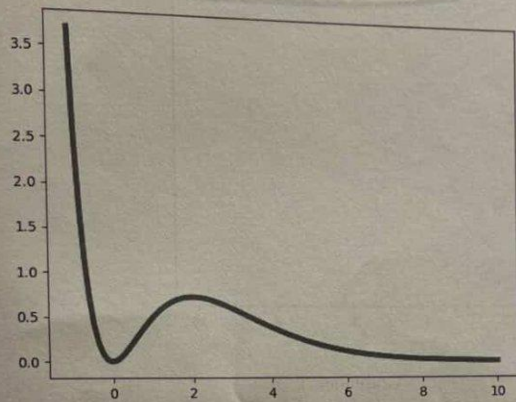
```
def fact(n):
    f=...
    for k in range(1,n+1):
        f=...
    return f
```

(8) En utilisant la fonction `fact(n)` de la question précédente, donner une très courte fonction d'en-tête `def f(n,x):`, des variables n, entier naturel, et x, réel, de telle sorte qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$. On rappelle que, pour tout réel x, `np.exp(x)` calcule la valeur de $\exp(x)$.

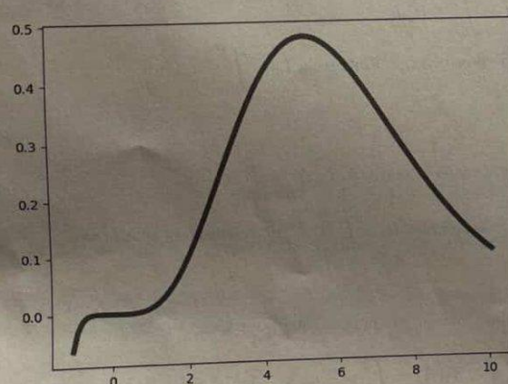
(9) Le script suivant permet de tracer la représentation graphique de la fonction f_n pour différentes valeurs de l'entier naturel n sur l'intervalle $[-1, 10]$.

```
X=np.linspace(-1,10,100)
Y=f(n,X)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

Dites, en justifiant, parmi les trois représentations graphiques suivantes lesquelles sont celles de f_1 et f_2.

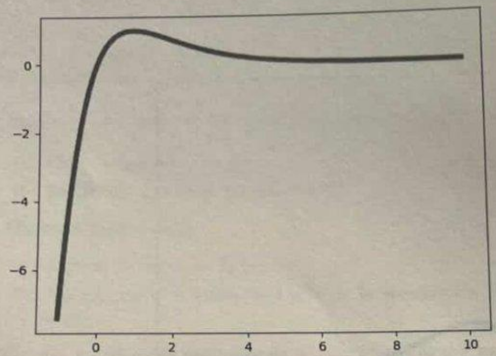


Graphique 1



Graphique 2

Tournez la page SVP



Graphique 3

Partie III : Intégrales définies à partir des fonctions f_n.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et tout réel positif $A \in \mathbb{R}^+$, on considère l'intégrale

$$I_n(A) = \int_0^A \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt = \int_0^A f_n(t) dt.$$

On considère aussi, si elle converge, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

(10) Étude de I_0.

(a) Calculer, pour tout réel positif A, $I_0(A) = \displaystyle\int_0^A e^{1-t} dt$.

(b) En déduire que l'intégrale $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{1-t} dt$ converge et que $I_0 = e$.

(11) Étude de I_1.

(a) Montrer, par intégration par parties, que pour tout $A \in \mathbb{R}^+$,

$$I_1(A) = \int_0^A t e^{1-t} dt = -Ae^{1-A} + I_0(A).$$

(b) En déduire que, pour tout $A \in \mathbb{R}^+$, $I_1(A) = -Ae^{1-A} - e^{1-A} + e$.

(c) Montrer que l'intégrale $I_1 = \int_0^{+\infty} te^{1-t}dt$ converge et que $I_1 = e$.

On admet que l'on peut montrer de manière analogue que $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2}e^{1-t}dt$ converge et que $I_2 = e$.

Partie IV : Une variable à densité.

On considère la fonction g définie pour tout réel t par $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{e}f_1(t) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

(12) Montrer que g est une densité de probabilité. (On pourra utiliser certains résultats de la partie III).

(13) On considère une variable aléatoire X de densité g. On note G sa fonction de répartition.

(a) Calculer $G(x)$ pour tout réel x en distinguant les cas $x < 0$ et $x \geq 0$.

(b) En utilisant l'intégrale I_2 de la partie III, montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 2

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 1, v_0 = 2, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 5u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n + 6v_n. \end{cases}$$

Partie I : Variations des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Montrer par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$P_n : u_n \text{ et } v_n \text{ sont des entiers strictement positifs.}$$

(2) En déduire que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement croissantes.

Partie II : Terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de deux suites auxiliaires.

On considère, dans cette partie, les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier naturel n par

$$x_n = u_n + v_n \text{ et } y_n = 3u_n - 2v_n.$$

(3) Calculer les valeurs de x_0 et y_0.

Tournez la page SVP

(4) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 8 puis donner le terme général de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(5) Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 puis donner le terme général de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(6) Pour tout n entier naturel fixé, résoudre le système suivant d'inconnues u_n et v_n et de paramètres x_n et y_n :

$$\begin{cases} u_n + v_n = x_n \\ 3u_n - 2v_n = y_n \end{cases}$$

(7) On peut alors en déduire les termes généraux de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = -\frac{1}{5}3^n + \frac{6}{5}8^n$ et $v_n = \frac{1}{5}3^n + \frac{9}{5}8^n$.

Partie III : Terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'une relation de récurrence d'ordre 2.

(8) Calculer u_1 et v_1.

(9) En notant que, pour tout entier naturel n, on a la relation

$$(*) : \quad v_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - 5u_n\right),$$

montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation

$$u_{n+2} = 11u_{n+1} - 24u_n.$$

(10) Déterminer les racines x_1 et x_2 du polynôme $X^2 - 11X + 24$.

(11) On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n = a(x_1)^n + b(x_2)^n$, où x_1 et x_2 sont les réels trouvés à la question 10.

En utilisant les valeurs de u_0 et u_1, déterminer les valeurs des réels a et b.

(12) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = -\frac{1}{5}3^n + \frac{6}{5}8^n$ puis montrer, à l'aide de la relation $(*)$ de la question 9, que, pour tout entier naturel n, on a $v_n = \frac{1}{5}3^n + \frac{9}{5}8^n$.

Partie IV : Terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des puissances d'une matrice.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(13) (a) Vérifier que $X_{n+1} = MX_n$.

(b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.

(14) (a) Calculer M^2 puis $M^2 - 11M + 24I_2$, où on a noté I_2 la matrice identité de taille 2.

(b) En déduire un polynôme annulateur de M.

(c) Déterminer les valeurs propres possibles de M.

(15) Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres de M et donner les valeurs propres associées.

(16) On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(b) Montrer que $MP = PD$. En déduire que M est diagonalisable.

(c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $M^n = PD^nP^{-1}$.

(17) (a) Pour tout entier naturel n, déterminer les quatre coefficients de D^n puis en déduire ceux de M^n.

(b) En utilisant la question 13.b, retrouver, encore une fois, les expressions des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne contient des jetons à deux faces portant chacun sur une des faces un numéro bleu, et sur l'autre face un numéro rouge.

Sur l'ensemble des jetons, on a, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, exactement k jetons qui portent le numéro k bleu, l'autre face, rouge portant les numéros 1 à k. On convient de noter le jeton avec son numéro bleu en premier et son numéro rouge en second.

Ainsi, lorsque $n = 2$, en notant en premier le numéro bleu et en second le numéro rouge, l'urne contient 3 jetons :

- un jeton portant une face bleue numéro 1 et une face rouge numéro 1, que l'on note $(1, 1)$
- un jeton portant une face bleue numéro 2 et une face rouge numéro 1, que l'on note $(2, 1)$
- un jeton portant une face bleue numéro 2 et une face rouge numéro 2, que l'on note $(2, 2)$.

De même, lorsque $n = 3$, en notant toujours en premier le numéro bleu et en second le numéro rouge, l'urne contient les 6 jetons $(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)$ et $(3, 3)$.

Partie I : Tirage d'un jeton dans l'urne dans le cas $n = 4$.

On tire un jeton au hasard dans l'urne. On désigne par B la variable aléatoire réelle égale à son numéro bleu et par R la variable aléatoire réelle égale à son numéro rouge. On pose aussi $G = B - R$.

Par exemple, si on a tiré le jeton $(3, 2)$, cad avec le numéro 3 en bleu et le numéro 2 en rouge, on a $B = 3$, $R = 2$ et $G = 1$.

(1) Justifier brièvement pourquoi on a les 10 jetons suivants dans l'urne (en notant toujours en premier le numéro bleu et en second le numéro rouge) :

$$(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3) \text{ et } (4,4).$$

(2) (a) Décrire l'ensemble des valeurs prises par les variables aléatoires B et R.

(b) Justifier que $\mathbf{P}((B = 1) \cap (R = 1)) = \dfrac{1}{10}$. Que vaut $\mathbf{P}((B = 1) \cap (R = 2))$?

(c) Recopier et compléter le tableau suivant qui donne la loi conjointe du couple (B, R).

$j \in R(\Omega)$ \ $i \in B(\Omega)$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{10}$			
2				
3				
4				

(3) (a) Déduire du tableau de la question précédente donnant la loi du couple (B, R), la loi de la variable aléatoire B.

(b) Vérifier que l'espérance de B vaut $\mathbf{E}(B) = 3$ et calculer la variance $\mathbf{V}(B)$ de B.

(4) (a) Déduire aussi de la loi du couple (B, R), la loi de R.

(b) Calculer l'espérance $\mathbf{E}(R)$ et la variance $\mathbf{V}(R)$ de la variable aléatoire R.

(5) (a) À partir de la loi du couple (B, R) trouvée en question 2.c, calculer $\mathbf{E}(BR)$.

(b) Rappeler la formule donnant la covariance $\mathrm{Cov}(B, R)$ du couple (B, R) puis la calculer.

(c) Est-ce que les variables aléatoires B et R sont indépendantes ?

(6) Calculer l'espérance $\mathbf{E}(G)$ de la variable aléatoire G.

Partie II : Temps d'attente du premier et du second tirage du jeton numéroté 1 en bleu.

Dans cette partie, on effectue maintenant des tirages avec remise dans l'urne et on suppose encore que $n = 4$ (on a donc encore les 10 jetons donnés à la question I.1). On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'évènement S_k : "on obtient le jeton numéroté 1 en bleu lors du k-ième tirage".

(7) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On conserve les notations de la partie précédente : B_k et R_k désignent les numéros bleus et rouges du jeton tiré aux k-ième tirage. Expliquer brièvement pourquoi on a les égalités d'évènements suivantes : $S_k = (B_k = 1) = (B_k = 1) \cap (R_k = 1)$. En déduire que, pour tout entier naturel non nul k, on a $\mathbf{P}(S_k) = \frac{1}{10}$.

(8) On note T_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois le jeton numéroté 1 en bleu. $\rightarrow$ geo

Donner, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire T_1 puis donner son espérance et sa variance. $(1-p)^{k-1}p.$ $E(X)\ \frac{1}{p}$ $V(X)\ \frac{1-p}{p^2}$

(9) On note T_2 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la seconde fois le jeton numéroté 1 en bleu.

On note également, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, X_m la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu l'évènement S, cad où l'on a tiré le jeton numéroté 1 en bleu, lors des m premiers tirages.

(a) Décrire l'ensemble des valeurs prises par T_2.

(b) Montrer que la variable aléatoire X_m suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(c) Justifier que, pour tout entier $k \geq 2$, on a l'égalité des évènements : $(T_2 = k) = (X_{k-1} = 1) \cap S_k$.

(d) En déduire la loi de T_2.

Partie III : Une série statistique.

On appelle partie le tirage d'un jeton de l'urne. Des amis ont noté les différents résultats qu'ils ont obtenu lors de leurs parties. Les résultats sont mémorisés dans une base de données. Celle-ci est constituée d'une table `Parties` avec les attributs suivants.

- **IdPartie** : Identifiant unique, entier, de type `INT`
- **NomJoueur** : Nom du joueur, de type `TEXT`
- **B** : Valeur du numéro bleu du jeton tiré, de type `INT`
- **R** : Valeur du numéro rouge du jeton tiré, de type `INT`.

(10) Expliquer pourquoi **NomJoueur** ne peut sans doute pas être choisi comme clé primaire. Proposer un attribut qui puisse être une clé primaire.

(11) En utilisant la commande `CREATE TABLE` écrire une requête qui permet de créer la table `Partie`.

(12) Écrire une requête qui renvoie le nom des joueurs ayant obtenu le numéro 1 avec le jeton bleu.

—FIN—