



## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

---

### MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.**

## EXERCICE 1

Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $a \neq 0$ ,

on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$  et on note  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Q1.** Quel est le rang de la matrice  $J$  ? Diagonaliser la matrice  $J$  sans calculer de déterminant. On ne demande pas la matrice de passage.
- Q2.** En déduire que la matrice  $A$  est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.
- Q3.** Justifier, sans calculs, que le polynôme minimal de la matrice  $A$  est :  $\pi_A = (X - b)(X - 3a - b)$ .
- Q4.** Déterminer les puissances successives de  $A$  par deux méthodes différentes :
- a) En déterminant le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par le polynôme  $\pi_A = (X - b)(X - 3a - b)$ .  
On pourra laisser la réponse en fonction des matrices  $A$  et  $I$ .  
Pour simplifier les calculs, on posera  $\lambda = 3a + b$  et on pourra laisser  $\lambda$  dans la réponse.
- b) Calculer  $J^k$  pour tout entier  $k \geq 1$ , puis utiliser  $A = aJ + bI$ .  
On pourra laisser la réponse en fonction des matrices  $J$  et  $I$  (sans le signe somme).

## EXERCICE 2

Dans cet exercice  $n$  est un entier naturel non nul.

On note  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$  un polynôme de degré  $n - 1$  à coefficients réels.

On note, pour  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ ,  $\omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$  les  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité.

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant :

(\*) le produit  $P(\omega_1)P(\omega_2)\dots P(\omega_{n-1})$  est un nombre réel.

**Q5.** Exemple.

Si on note  $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$ , déterminer ce que vaut  $1 + j + j^2$ .

Choisir un polynôme de votre choix de degré 2 à coefficients réels tous non nuls et tous différents et vérifier le résultat (\*).

**Q6.** On note la matrice  $J$  de  $M_n(\mathbb{R})$  :  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(chaque ligne et chaque colonne contient un et un seul 1).

Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice  $J$  est  $\chi_J = X^n - 1$ .

Q7. On note  $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ .

(les coefficients du polynôme  $P$  se trouvent sur la première ligne, puis sur les lignes suivantes avec un « décalage d'une case vers la droite »).  
Comparer la matrice  $A$  et la matrice  $P(J)$  (on ne demande pas le détail des calculs).

- Q8. Diagonaliser la matrice  $J$  dans  $M_n(\mathbb{C})$  (on ne demande pas la matrice de passage), puis diagonaliser la matrice  $A$  dans  $M_n(\mathbb{C})$ .
- Q9. En déduire le résultat (\*).

### PROBLÈME

Q10. Question de cours.

Si  $E$  est un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire  $\langle | \rangle$  et de sa norme euclidienne associée notée  $\| \cdot \|$ , si  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ , on définit le projeté orthogonal sur  $F$  d'un vecteur  $x$  de  $E$  noté  $p_F(x)$  ainsi :

$p_F(x)$  est l'unique vecteur de  $F$  vérifiant  $x - p_F(x) \in F^\perp$ .

- a) Si  $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $F$ , démontrer que  $p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i$ .
- b) Démontrer que pour tout vecteur  $x$  de  $E$ ,  $\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$  et que  $\sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$ .

Q11. Justifier que pour tout couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ .

On note désormais  $F = \mathbb{R}_n[X]$ ,  $I = [0, +\infty[$  et  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , telles que la fonction  $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$  soit intégrable sur l'intervalle  $I$ .

Justifier que pour  $f$  et  $g$  dans  $E$ , la fonction  $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$  est intégrable sur l'intervalle  $I$ .

Q12. Démontrer que  $E$  est un espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur  $E$  en posant :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt.$$

Q13. On identifie  $\mathbb{R}[X]$  et les fonctions polynomiales sur  $\mathbb{R}$ . Justifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Ainsi  $\langle | \rangle$ , défini sur  $\mathbb{R}[X]$ , par  $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

**Q14.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose pour tout réel  $x$ ,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

a) Calculer pour tout entier naturel  $p \leq n$ ,  $h_n^{(p)}(x)$ .

Si  $p < n$ , que vaut  $h_n^{(p)}(0)$  ?

b) Démontrer que  $L_n \in \mathbb{R}[X]$ , préciser son degré et son coefficient dominant.

**Q15.** Soit  $g$  élément de  $\mathbb{R}[X]$ , exprimer  $\langle g | h_n^{(n)} \rangle$  en fonction de  $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt$ , puis exprimer

$$\langle g | L_n \rangle \text{ en fonction de } \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt.$$

**Q16.** Si  $L_i$  et  $L_j$ , avec  $i < j$ , sont deux éléments de  $F$ , déterminer  $\langle L_i | L_j \rangle$ .

**Q17.** Calculer par des intégrations par parties,  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ , puis pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $\langle L_n | L_n \rangle$ .

**Q18.** Que peut-on en conclure concernant la base  $(L_0, L_1, L_2, \dots, L_n)$  de vecteurs de  $F$  ?

Exprimer, pour tout  $g$  élément de  $E$ ,  $P_F(g)$  dans cette base.

**Q19.** Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \langle g | L_n \rangle^2$  converge et majorer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g | L_n \rangle^2$ .

**Q20.** Pour  $\alpha > \frac{-1}{2}$ , on pose  $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$ .

Vérifier que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $g_\alpha \in E$ .

Démontrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$ .

**FIN**