SESSION 2026 **PC1M**

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Réduction de matrices par blocs

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier les propriétés de certaines matrices par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 .$$

On rappelle que les opérations sur les matrices par blocs s'effectuent de la même manière que sur les matrices classiques du moment que les tailles des blocs sont compatibles. Par exemple, pour tout élément $(A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}, B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}, B_{2,2}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^8$, on a :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Les **parties I** et **II** sont indépendantes.

Partie I - Étude d'une première forme

Dans cette partie, on étudie la matrice par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

I.1 - Étude d'un exemple

Dans cette sous-partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Q1. Justifier que la matrice M est diagonalisable.

Q2. Déterminer les valeurs propres de la matrice M.

Q3. Montrer que M est une matrice symétrique positive. Est-elle définie positive ?

I.2 - Réduction de la matrice M

Dans cette sous-partie, on revient au cas général où l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont quelconques. On considère la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Q4. Montrer que la matrice P est inversible et que :

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Q5. En utilisant la matrice P définie précédemment, montrer que M est semblable à la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} O_n & O_n \\ O_n & 2A \end{pmatrix}.$$

Q6. On note χ_A le polynôme caractéristique de A et χ_M le polynôme caractéristique de M.

Montrer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ que $\chi_M(\lambda) = \lambda^n 2^n \chi_A\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. En déduire le spectre de la matrice M en fonction du spectre de A.

Q7. Soit un polynôme $Q = \sum_{k=0}^{d} q_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $d \in \mathbb{N}$ et $(q_0, \ldots, q_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Le polynôme Q est annulateur de la matrice A et on a $Q(0) = 0$.

(ii) Le polynôme $Q\left(\frac{X}{2}\right)$ est annulateur de D.

Q8. En déduire que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II - Étude d'une seconde forme

Dans cette partie, on étudie la matrice par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ O_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Q9. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ O_n & A^k \end{pmatrix}.$$

Q10. En déduire que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$Q(M) = \begin{pmatrix} Q(A) & AQ'(A) \\ O_n & Q(A) \end{pmatrix}.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que la matrice M est diagonalisable et on note $S \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de M scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Q11. Établir que la matrice $S'(A)$ est diagonalisable, puis exprimer son spectre en fonction de celui de la matrice A et du polynôme S'.

Q12. Montrer que $S'(A)$ est une matrice inversible. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la matrice M soit diagonalisable.

EXERCICE 2

Autour de la loi géométrique

Présentation générale

Dans cet exercice, on fixe un réel $p \in]0,1[$ et on note $q = 1 - p$. On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi géométrique de paramètre p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les variables aléatoires définies par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad V_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les lois des variables aléatoires S_n et V_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

La **partie I** est indépendante des **parties II** et **III**. La **partie III** peut se traiter en admettant les résultats de la **partie II**.

Partie I - Étude de la variable aléatoire S_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons déterminer la loi de S_n.

Q13. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire S_n.

Q14. Rappeler l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_1, puis déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n.

Soit Y une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$. On rappelle que la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire est la fonction d'une variable réelle définie par :

$$G_Y : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^Y\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) t^k.$$

Q15. Montrer que la série entière $\sum_{k\geqslant 0} P(Y = k)t^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

Q16. Soit $t \in]-1, 1[$. Exprimer $G_{S_n}(t)$ en fonction de $G_{X_1}(t), \dots, G_{X_n}(t)$, puis en déduire que :

$$G_{S_n}(t) = \left(\frac{pt}{1 - qt}\right)^n.$$

Q17. Déterminer le développement en série entière de la fonction $t \mapsto (pt)^n(1 - qt)^{-n}$ sur $]-1, 1[$, puis en déduire une expression de $P(S_n = k)$ pour tout entier $k \in S_n(\Omega)$.

Partie II - Loi de la variable aléatoire V_n

Dans cette partie, nous allons déterminer la loi de V_n où $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier.

Q18. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ que $P(X_1 > k) = q^k$.

Q19. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ que $P(V_n \leqslant k) = \left(1 - q^k\right)^n$.

Les questions **Q20** et **Q21** peuvent se traiter de manière indépendante.

Q20. Montrer que V_n est d'espérance finie et que :

$$\mathrm{E}(V_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \left(1 - q^k\right)^n\right).$$

Q21. Déterminer la loi de la variable aléatoire V_n. On commencera par déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une relation entre les évènements $(V_n = k)$, $(V_n \leqslant k)$ et $(V_n \leqslant k - 1)$.

Partie III - Équivalent de l'espérance de V_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons déterminer un équivalent simple de l'espérance de V_n lorsque $n \to +\infty$.

On considère la fonction $\varphi_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_n : x \mapsto 1 - \left(1 - q^x\right)^n$.

Q22. Montrer que la fonction φ_n est décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Q23. En utilisant la méthode de comparaison série-intégrale, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{E}(V_n) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Q24. En utilisant le changement de variable $u = 1 - q^x$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u}\,\mathrm{d}u$ converge et que :

$$\int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u}\,\mathrm{d}u = -\ln(q) \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans la suite, on admet que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).$$

Cette relation admise pourra être utilisée librement dans la question suivante.

Q25. Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $\mathrm{E}(V_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

EXERCICE 3

Résolution d'une équation différentielle non ordinaire

Présentation générale

Dans cet exercice, on considère un réel $\lambda \in [-1,1]$. On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda x). \tag{E_λ}$$

On note S_λ l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E_λ).

Les trois parties de cet exercice peuvent se traiter de manière indépendante, à l'exception de la **Q37** qui nécessite l'utilisation des résultats des **parties II** et **III**.

Partie I - Généralités

Q26. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que S_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Q27. Déterminer l'ensemble S_1.

Q28. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant (E_0), alors f est une fonction affine. En déduire l'ensemble S_0.

Q29. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant (E_{-1}), alors la fonction f est deux fois dérivable et on a $f'' + f = 0$. En déduire l'ensemble S_{-1}.

Partie II - Solutions développables en série entière

Dans cette partie, on suppose que $\lambda \neq 0$. Nous allons déterminer les solutions de (E_λ) développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

Q30. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!}$.

Dans la suite de cette partie, on note $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la somme de la série entière étudiée dans la question précédente.

Q31. Montrer que $\varphi \in S_\lambda$.

Dans la suite, on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telle que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ admet un rayon de convergence infini. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

Q32. Montrer que si f est solution de (E_λ), alors on a $(n+1)a_{n+1} = \lambda^n a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q33. En déduire que f est solution de (E_λ) si et seulement si $f \in \mathrm{Vect}(\varphi)$.

Partie III - Détermination de toutes les solutions

Dans cette partie, on suppose que $\lambda \neq 0$ et on considère une fonction $f \in S_\lambda$. Nous allons montrer que la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

On **admet** et on pourra utiliser librement dans la suite la formule de Taylor suivante : si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad h(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} h^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q34. Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ que f est C^n sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(t) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n t).$$

Dans la suite, on considère un réel $a > 0$ et un réel $x \in [-a, a]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction :

$$g_n : t \mapsto \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t).$$

Q35. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-a, a]$.

Q36. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Q37. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel S_λ ?

FIN