SESSION 2026

PSI1M

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

EXERCICE 1

Un jeu de pile ou face

Préliminaires

Q1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]-1, 1[$, et que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Q2. Établir que : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1, 1[,\ \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$

Étude d'un jeu de Pile ou Face

Soit $p \in]0, 1[$. Deux joueurs effectuent des lancers indépendants d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir *Pile* est p. Le jeu se déroule de la manière suivante.

- Le joueur 1 effectue une succession de lancers et s'arrête lorsqu'il obtient *Pile* pour la première fois.
  On admettra qu'avec une probabilité de 1, le joueur obtient Pile après un nombre fini de lancers.
- Le joueur 2 effectue ensuite le même nombre de lancers que le joueur 1 et compte le nombre de fois où il a obtenu *Pile*.

On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

- On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers effectués par le joueur 1.
- On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de *Pile* obtenus par le joueur 2.

Q3. Préciser la loi de X.

Q4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité de l'événement $\{Y = k\}$ sachant $\{X = n\}$, notée par la suite $\mathrm{P}(Y = k \mid X = n)$.

Q5. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathrm{P}(Y = k)$ en fonction des réels $\mathrm{P}(Y = k \mid X = n)$ et $\mathrm{P}(X = n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q6. Établir que : $\quad \mathrm{P}(Y = 0) = \dfrac{1-p}{2-p}.$

Q7. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad \mathrm{P}(Y = k) = \dfrac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$

EXERCICE 2

Une caractérisation de la fonction Gamma

L'objet de cet exercice est l'étude d'une caractérisation de la fonction Gamma connue sous le nom de théorème de Bohr-Mollerup.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant.

Lemme 1. *Si g est une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$, alors pour tous x, y éléments de $I \setminus \{a\}$ tels que $x \leqslant y$,*

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \leqslant \frac{g(y)-g(a)}{y-a}.$$

Dans cet exercice, nous cherchons à montrer que la seule fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) = xf(x) \\ f(1) = 1 \\ \ln \circ f \text{ est une fonction convexe} \end{cases} \qquad (S)$$

est la fonction Γ, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Existence : la fonction Γ vérifie (S)

Q8. Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Q9. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans les questions **Q10** à **Q12**, a et b désignent des réels vérifiant $0 < a < 1 < b$ et φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t \in]0,1] \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \in]1,+\infty[\end{cases}.$$

Q10. Établir que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*,\ t^{x-1}e^{-t} \leqslant \varphi(t).$$

Q11. Pour $k \in \{0,1,2\}$, on définit la fonction ψ_k sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi_k(t) = |\ln t|^k \varphi(t).$$

Montrer que les fonctions ψ_k ($k \in \{0,1,2\}$) sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q12. Déduire des deux questions précédentes que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner l'expression des deux fonctions Γ' et Γ'' sous une forme intégrale.

Q13. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\alpha < \beta$. Pour tout couple (u, v) de fonctions continues sur $[\alpha, \beta]$, on pose :

$$\langle u, v\rangle = \int_\alpha^\beta u(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([\alpha, \beta])$.

Q14. En utilisant la question **Q13** et en ayant recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (\Gamma'(x))^2 \leqslant \Gamma(x)\Gamma''(x).$$

En déduire que la fonction $\ln \circ \Gamma$ est convexe et conclure que Γ vérifie bien (S).

Unicité

On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifie (S). On introduit par ailleurs la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \ln(f(x)).$$

Q15. Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)f(x).$$

En déduire les valeurs de $f(n+1)$ et de $g(n+1)$.

Q16. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ g(x+n+1) = g(x) + \ln\left(x(x+1)\dots(x+n)\right).$$

Q17. À l'aide du **Lemme 1**, justifier que :

$$\forall x \in]0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(n+1) - g(n) \leqslant \frac{g(x+n+1) - g(n+1)}{x} \leqslant g(n+2) - g(n+1).$$

Q18. À l'aide des questions **Q16** et **Q17**, établir que :

$$\forall x \in]0,1],\ f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \qquad (1)$$

Q19. Déduire des questions **Q14** et **Q18** que pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = \Gamma(x)$.

Q20. En utilisant la question **Q15**, conclure que $f = \Gamma$.

PROBLÈME

Étude d'une classe d'endomorphismes

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, par convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note :

$$u^k = \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{k \text{ fois}}.$$

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $F_1, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. Lorsque la somme $F_1 + \ldots + F_k$ est directe, on la note $\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$. Par convention, si $k = 0$ (cas d'une somme vide), la somme vaut $\{0\}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $M_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices de taille $p \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_p[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à p.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On admet que les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + 2q = n$ et des sous-espaces vectoriels $D_1, \ldots, D_p, P_1, \ldots, P_q$ de E stables par u, les D_i étant de dimension 1 et les P_j de dimension 2, tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} D_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} P_j.$$

(*ii*) il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + 2q = n$ et une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2. Autrement dit,

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \exists (M_1, \ldots, M_q) \in M_2(\mathbb{K})^q \ :\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_p & & & \\ & & & M_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & M_q \end{pmatrix}.$$

Dans tout le problème, on note $\mathscr{D}$ l'ensemble des endomorphismes de E qui vérifient (*i*) ou (*ii*).

Objectif du problème

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés de l'ensemble $\mathcal{D}$. Après avoir étudié deux exemples dans la **partie I**, on étudie dans la **partie II** les endomorphismes nilpotents de $\mathcal{D}$. Dans la **partie III**, on démontre un critère d'appartenance à $\mathcal{D}$ faisant intervenir des polynômes annulateurs.

Partie I - Deux exemples

Dans cette partie, on note $E = \mathbb{K}_2[X]$. On définit $u, v \in \mathscr{L}(E)$ par :

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & X^2P'' + P' \end{array} \qquad \text{et} \qquad v : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array}.$$

Étude de u

Q21. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$. Est-elle diagonalisable ?

Q22. Déterminer $\operatorname{Ker} u^2$ et justifier que $\operatorname{Ker} u^2$ est un sous-espace vectoriel stable par u.

Q23. Donner une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et conclure que $u \in \mathcal{D}$.

Étude de v

Q24. Donner la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Q25. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension 1 stables par v.

Q26. Montrer que $\mathbb{K}_1[X]$ est le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 2 stable par v.

Q27. En déduire que $v \notin \mathcal{D}$.

Q28. $\mathcal{D}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$?

Partie II - Le cas des endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k vérifiant $u^k = 0$ est appelé indice de nilpotence de u.

Dans la suite, on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des endomorphismes de E nilpotents et on pose :

$$\mathcal{N}_2 = \{u \in \mathscr{L}(E) : u^2 = 0\}.$$

Dans toute cette partie, $u \in \mathcal{N}$ est un endomorphisme nilpotent d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ et de rang $r \in \mathbb{N}$.

On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$.

Cas $n = 1$

Q29. Que dire de u si $\dim E = 1$?

Cas $n = 2$

On suppose dans ce cas que $\dim E = 2$ et que u est non nul.

Q30. Soit $x \in E$ tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$. Justifier que $(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \ldots, u(x), x)$ est une famille libre.

Q31. En déduire que $k = 2$, puis que $u \in N_2$.

Cas général

E désigne maintenant un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

Q32. Montrer que $\mathcal{D} \cap N \subset N_2$.

Soit $u \in N_2$.

Q33. Justifier que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ et que $r \leqslant n - r$.

Q34. Notons $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} u$ que l'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ de $\operatorname{Ker} u$. Soient $f_1, \ldots, f_r \in E$ tels que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $u(f_i) = e_i$.
Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_{n-r}, f_1, \ldots, f_r)$ est une base de E.

Q35. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0_{n-2r} & & & \\ & J & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & J \end{pmatrix},$$

où 0_{n-2r} désigne la matrice nulle de $M_{n-2r}(\mathbb{K})$ et où les autres blocs diagonaux égaux à J sont en nombre r.

Q36. En déduire que $N_2 = \mathcal{D} \cap N$.

Partie III - Un critère d'appartenance à $\mathcal{D}$

Dans toute cette partie, $u \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme quelconque.
On souhaite montrer que s'il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples ou doubles, alors $u \in \mathcal{D}$.

Q37. Soient $a, b \in \mathbb{K}$, distincts. On définit :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_1[X]^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ (A, B) & \longmapsto & (X-a)^2 A + (X-b)^2 B \end{array}.$$

Montrer que φ est un isomorphisme. En déduire l'existence d'un couple $(A, B) \in \mathbb{K}_1[X]^2$ tel que :

$$(X-a)^2 A + (X-b)^2 B = 1.$$

Q38. Justifier que pour tous $a, b \in \mathbb{K}$ distincts, $\operatorname{Ker}(u - a\,\mathrm{Id}_E)^2 \cap \operatorname{Ker}(u - b\,\mathrm{Id}_E)^2 = \{0\}$.

Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{K}^q$ deux familles de scalaires telles que les $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ sont distincts. On notera que l'une des deux familles $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_q)$ peut éventuellement être vide.

Q39. Justifier que la somme :

$$\bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(u - \alpha_i\,\mathrm{Id}_E)$$

est directe.

Q40. Montrer que la somme :

$$\bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(u - \alpha_i\,\mathrm{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} \operatorname{Ker}(u - \beta_j\,\mathrm{Id}_E)^2$$

est directe.

On pourra procéder par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$.

Q41. Soit :

$$P = \prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)\prod_{j=1}^{q}(X - \beta_j)^2 \in \mathbb{K}[X]. \qquad (2)$$

Pour $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$, on note P_i, Q_j et R_j les polynômes tels que :

$$P = (X - \alpha_i)P_i, \qquad P = (X - \beta_j)Q_j, \qquad P = (X - \beta_j)^2 R_j.$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_q)$ est libre. En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$.

On suppose à partir de maintenant que le polynôme P défini en (2) est annulateur de u.

Q42. En décomposant le polynôme constant égal à 1 sur la base $\mathcal{B}$, justifier que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(u - \alpha_i\,\mathrm{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} \operatorname{Ker}(u - \beta_j\,\mathrm{Id}_E)^2.$$

Q43. Conclure que $u \in \mathcal{D}$.

On pourra utiliser le résultat de la question **Q36**.

FIN