e3a
POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Questions préliminaires

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Vérifier que $\varphi : t \mapsto t^n$ est une fonction convexe sur $]0,1[$.

2. Écrire l'inégalité de convexité de *Jensen* pour cette fonction.

3. Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et J la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

3.1. Déterminer un polynôme annulateur de J de degré 2. Hamilton

3.2. En déduire les valeurs propres possibles de $I_p + J$.

3.3. Justifier alors que la matrice $I_p + J$ appartient à $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $I_p + J$ est une matrice symétrique réelle définie positive.

*****

Soient n et r deux entiers naturels avec $n \geqslant 2$ et $r \geqslant 3$.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents $(\alpha_j)_{j\in[\![1,r]\!]}$ de probabilités respectives $(x_j)_{j\in[\![1,r]\!]}$ avec : $\forall j \in [\![1,r]\!],\ x_j \in]0,1[$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite au-dessus, ce qui définit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $j \in [\![1,r]\!]$, on note X_j la variable aléatoire telle que $X_j(\Omega) = \{0,1\}$, et pour tout $\omega \in \Omega$:

- $X_j(\omega) = 0$ si α_j est obtenu au moins une fois à l'issue de ces n épreuves,
- $X_j(\omega) = 1$ sinon, c'est-à-dire si α_j n'est jamais obtenu.

Enfin, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

4. Une expression de l'espérance de X

4.1. Soit $j \in [\![1,r]\!]$. Déterminer la loi de X_j.

4.2. Exprimer la variable aléatoire X à l'aide des variables $(X_j)_{j\in[\![1,r]\!]}$.

4.3. Démontrer alors que l'espérance de la variable aléatoire X est : $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{r}(1-x_j)^n$.

5. La suite de l'exercice consiste à rechercher les valeurs des réels x_j pour lesquelles l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est minimale.

Cela revient à dire que l'on cherche un minimum pour la fonction $f : (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mapsto \sum_{j=1}^{r}(1-x_j)^n$ sous la contrainte :

$$\forall k \in [\![1,r]\!],\ x_k > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{r} x_j = 1.$$

On pose $U = \left\{(x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}, \forall k \in [\![1,r-1]\!], x_k > 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{r-1} x_j < 1\right\}$.

5.1. Représenter graphiquement U dans le plan, c'est-à-dire dans le cas où $r = 3$.

5.2. Justifier que U est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{r-1}$.

5.3. Déterminer une fonction h, définie sur U, des $r-1$ variables $(x_j)_{j\in[\![1,r-1]\!]}$, telle que :

$$h(x_1,\dots,x_{r-1}) = \mathbb{E}(X).$$

5.4. Prouver que h est de clesse C^2 sur U.

$$(h_1 \dots x_{t-1}) = \sum_{n=1}^{n} \dots x_j) =$$

5.5. Recherche des points critiques de h

5.5.1. Soient $j \in [\![1,r-1]\!]$ et $m = (x_1,\dots,x_{r-1}) \in U$.

Déterminer la j-ième coordonnée du vecteur gredient de la fonction h en m :

5.5.2. Déterminer l'unique point critique b de h sur U.

5.6. Conclusion

5.6.1. Écrire la matrice Hessienne de h en b.

5.6.2. Démontrer alors que :

$$\mathbb{E}(X) \text{ admet un minimum local pour } x_1 = \cdots = x_r = \frac{1}{r}.$$

On pourra utiliser une question préliminaire.

5.6.3. En utilisant la convexité de la fonction φ définie dans la question préliminaire, démontrer que :

$$\mathbb{E}(X) \text{ est minimale si, et seulement si, } x_1 = \cdots = x_r = \frac{1}{r}.$$

EXERCICE 2

Question de cours

1. Rappeler, sans démonstration, les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge.

   Lorsqu'il y a convergence, on note $\zeta(x)$ sa somme.

2. Rappeler, sans démonstration, la somme et l'intervalle de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} t^n$.

* * * * *

On rappelle que si f est une fonction infiniment dérivable sur une partie I de $\mathbb{R}$, alors, pour tout entier naturel p, $f^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de la fonction f avec la convention $f^{(0)} = f$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on note, lorsque cela existe :

$$E_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right) \text{ et, pour } k \geqslant 2,\ E_k(x) = \frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^k}$$

3. Justifier l'existence de $E_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

4.1. Étudier la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(x-n)^k}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(x+n)^k}$.

4.2. En déduire l'existence de $E_k(x)$ pour tout $k \geqslant 2$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

5.1. Démontrer que la fonction E_k est 1-périodique.

5.2. Étudier la parité de la fonction E_k.

6. Une relation de récurrence

6.1. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction E_k est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ E_k'(x) = -k\, E_{k+1}(x).$$

6.2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction E_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que :

$$E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}.$$

7. Montrer que pour tout x de $]-1,1[$ et pour tout entier naturel non nul n, la série $\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{n^{k+1}}$ converge et calculer sa somme.

8. Établir que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1}.$$

9. Montrer que pour tout x non nul de $]-1,1[$, on a :

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - 2\sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s)\, x^{2s-1}.$$

Le théorème utilisé sera cité avec précision en vérifiant ses hypothèses avec soin.

10. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-1,1[$, $x \neq 0$,

$$E_k(x) = \frac{1}{x^k} + 2(-1)^k \sum_{s=1}^{+\infty} \binom{2s-1}{k-1} \zeta(2s)\, x^{2s-k},$$

avec la convention $\binom{m}{p} = 0$ si $p > m$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. À tout n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^{n-1}$, c'est-à-dire que $a_1 \neq 0$, on associe la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. **Dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**

1.1. Justifier que M est diagonalisable.

1.2. Déterminer le rang de la matrice M.

1.3. Justifier que 0 est valeur propre et donner son ordre de multiplicité.

1.4. Démontrer alors que la matrice M possède deux valeurs propres non nulles (éventuellement égales) que l'on notera λ_1 et λ_2.

1.5. Déterminer une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

1.6. Soit λ un réel non nul.

En résolvant le système $MX = \lambda X$ où X est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, montrer que λ_1 et λ_2 sont solutions de l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda a_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0.$$

1.7. Déterminer une base des sous-espaces propres de M associés à λ_1 et λ_2.

1.8. Expliciter une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.

On précisera la matrice diagonale obtenue.

2. **Étude du cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**

2.1. Montrer que :

$$M \textbf{ n'est pas } \text{diagonalisable si, et seulement si, } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \\ \text{ou} \\ a_n^2 + 4\sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \end{cases}$$

2.2. Donner un exemple de matrice M non diagonalisable dans le cas où $n = 3$.

FIN