SESSION 2026

e3a
POLYTECH

PC8M

Bouret.
20e.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

On rappelle que si A est une matrice, alors $A^{\top}$ désigne sa transposée.

Questions préliminaires

Soit g un endomorphisme d'un espace vectoriel réel H.

1. Soit μ une valeur propre de g. Montrer que μ^2 est valeur propre de $g^2 = g \circ g$.

2. Montrer que si x est vecteur propre de g^2 associé à une valeur propre non nulle, alors $g(x)$ est un vecteur propre de g^2.

3. Démontrer que deux sous-espaces propres de g associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

4. Soit A une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$ à coefficients réels.
Exprimer, sans démonstration, $\det(-A)$ et $\det(A^{\top})$ en fonction de $\det(A)$.

* * * * *

On note $E = \mathbb{R}^5$ muni du produit scalaire usuel noté $(x|y) = X^{\top}Y$, où X et Y sont les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs x et y dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_j)_{j\in[\![1,5]\!]}$, orthonormale pour ce produit scalaire.
Soit f l'endomorphisme de E défini par sa matrice M dans la base $\mathscr{B}$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Premières propriétés de l'endomorphisme f

5.1. Déterminer la matrice $M + M^{\top}$.

5.2. Montrer que f n'est pas un automorphisme de E.

5.3. Déterminer le rang de la matrice M.

5.4. Prouver que f^2 est un endomorphisme symétrique de E.

5.5. Justifier alors que la matrice M^2 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$.

5.6. Montrer que f vérifie la propriété : $\forall\,(x,y) \in E^2,\ \ (f(x)|y) = -(x|f(y))$.

6. Étude des éléments propres de l'endomorphisme f

6.1. Montrer que 0 est la seule valeur propre de f.
On pourra utiliser la question précédente.

6.2. En déduire que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

6.3. Démontrer que les valeurs propres non nulles de f^2 sont strictement négatives.
On admet dans la suite que les valeurs propres distinctes de f^2 sont 0, -1 et -3.

7. Prouver que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

8. Soient λ une valeur propre non nulle de f^2 et x un vecteur propre associé.

8.1. Montrer que les vecteurs x et $f(x)$ forment une famille libre.

8.2. Justifier que $(x, f(x))$ engendre un plan vectoriel de $\mathrm{Im}(f)$.

9. Soient u un vecteur propre de f^2 associé à la valeur propre -1 et v un vecteur propre de f^2 associé à la valeur propre -3.

Montrer que $(u, f(u), v, f(v))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

On pourra utiliser des questions préliminaires.

10. Déterminer des réels α, β, γ et δ tels que la matrice M soit semblable à la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 2

Questions préliminaires

1. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $t \mapsto e^t$ en 0.

2. Soient h une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Justifier que la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.

3. En déduire que la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} h(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

* * * * *

4. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Justifier que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{x+t}\,dt$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit l'application T qui à toute fonction f, continue sur $[0, 1]$, associe la fonction F :

$$T(f) = F.$$

5. Un premier exemple

On pose pour tout entier naturel n, $f_n : t \in [0, 1] \mapsto t^n$ et $F_n = T(f_n)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

5.1. Calculer $F_0(x)$.

5.2. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_k(x) + xF_{k-1}(x)$.

5.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\frac{F_k(x)}{(-x)^k} - \frac{F_{k-1}(x)}{(-x)^{k-1}} = \frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^k.$$

5.4. En déduire que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n, que l'on déterminera, tel que :

$$F_n(x) = (-x)^n\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

6. Un deuxième exemple

Soient $g : t \in [0,1] \mapsto e^t$ et $G = T(g)$, c'est-à-dire :

$$G : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\, dt.$$

6.1. En effectuant le changement de variable $u = x + t$, prouver que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

6.2. On pose, lorsque cela existe :

$$J(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt \quad \text{et} \quad K(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t}\, dt.$$

6.2.1. Montrer que J et K sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

6.2.2. Montrer que la fonction $L : x \mapsto G(x)\, e^x - e\, K(x) + J(x) + \ln(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

6.2.3. En déduire enfin la limite de $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x)$ et un équivalent de $G(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

EXERCICE 3

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$. On pose, pour tout $k \in [\![1,3]\!]$, $p_k = \mathbb{P}(X = k) \in [0,1]$ et on se propose de déterminer pour quelles valeurs des $(p_k)_{k \in [\![1,3]\!]}$, la variance $\mathbb{V}(X)$ est maximale, puis minimale.

1. Déterminer les valeurs possibles pour la variable aléatoire X^2.

2. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$, l'espérance de la variable aléatoire X^2.

3. Exprimer la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X à l'aide des seuls paramètres p_1 et p_2.

4. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = 4x + y - 4x^2 - y^2 - 4xy.$$

On note T l'ensemble fermé et borné défini par : $T = \{(x,y) \in [0,1]^2,\ x + y \leqslant 1\}$.

4.1. Représenter graphiquement T dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4.2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

4.3. Montrer que f possède des extrema dans T.

4.4. Soit $m = (x,y)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Déterminer le vecteur gradient $\nabla f(m)$, de f, en m.

4.5. Prouver que f ne possède pas de point critique dans l'intérieur de T.

4.6. On note g la fonction réelle de la variable réelle qui à tout x réel associe $g(x) = x(1-x)$. Dresser le tableau des variations de la fonction g sur l'intervalle $[0,1]$ et en donner une représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4.7. Déterminer alors les extrema de f dans T.

5. Résoudre alors le problème posé au début de l'exercice.

6. Que peut-on dire de la variable aléatoire X lorsque sa variance est minimale ?

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1013 – D'après documents fournis