Sommes d'endomorphismes de carré nul

Préambule

Ce problème est consacré aux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie qui sont décomposables en la somme d'endomorphismes de carré nul.

Dans tout le problème, on considère uniquement des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et de dimension finie. Pour un tel espace vectoriel E, on note

$$\mathcal{C}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : u^2 = 0\}$$

l'ensemble des endomorphismes de E de carré nul ; pour tout $p \geqslant 1$, on note

$$\Sigma_p\mathcal{C}(E) = \{u_1 + \cdots + u_p \mid (u_1, \ldots, u_p) \in \mathcal{C}(E)^p\}$$

l'ensemble des endomorphismes de E qui se décomposent comme la somme de p endomorphismes de carré nul. On note enfin

$$\Sigma_\infty\mathcal{C}(E) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \Sigma_p\mathcal{C}(E)$$

l'ensemble des endomorphismes de E qui se décomposent comme la somme (d'un nombre arbitrairement grand) d'endomorphismes de carré nul.

Diverses caractérisations ont été données pour l'appartenance d'un endomorphisme de E à $\Sigma_2\mathcal{C}(E)$, autrement dit pour sa décomposabilité en la somme de deux endomorphismes de carré nul. Un des objectifs de ce problème est d'étudier la situation pour d'autres tailles de décomposition, notamment les cas $p = 3$ et $p = 4$.

Les cinq parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres, à l'exception de la partie E qui utilise pleinement les résultats de la partie D. Dans la partie A, on étudie la réduction des endomorphismes de carré nul. Dans la partie B, on caractérise l'appartenance à $\Sigma_\infty\mathcal{C}(E)$ de manière simple. Dans la partie C, on exhibe un endomorphisme qui est somme d'endomorphismes de carré nul mais n'est pas somme de trois endomorphismes de carré nul. Dans la partie D, on définit les matrices de Hessenberg et quelques propriétés. Dans la partie E, on établit enfin que tout endomorphisme qui est somme d'endomorphismes de carré nul est somme de quatre endomorphismes de carré nul.

Dans le sujet, on note 0_n la matrice nulle de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n sa matrice identité.

A Réduction des endomorphismes de carré nul

On fixe ici un espace vectoriel E de dimension finie $n > 0$. On se donne un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. On note r le rang de u.

1. Déterminer les valeurs propres possibles pour u et en déduire que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

2. En comparant noyau et image de u pour l'inclusion, montrer que $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.

3. Justifier qu'il existe une famille libre $(e_1, \ldots, e_r)$ de vecteurs de E telle que $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r) = E$; démontrer alors que $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une famille libre.

4. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par la matrice par blocs
$$\begin{pmatrix} 0_r & 0_r & (0) \\ I_r & 0_r & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2r} \end{pmatrix}.$$

5. Montrer qu'il existe un unique entier $m > 0$ tel que u soit représenté dans une base par la matrice par blocs
$$\begin{pmatrix} 0_m & 0_m & (0) \\ I_m & 0_m & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2m} \end{pmatrix}.$$

B Somme d'un nombre arbitraire d'endomorphismes de carré nul

On fixe ici un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$. On se propose de démontrer que $\Sigma_\infty \mathcal{C}(E)$ est égal à l'ensemble
$$\mathcal{H}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \ \mathrm{tr}(u) = 0\}.$$

Pour i, j dans $[\![1, n]\!]$, on rappelle que $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ possédant exactement un coefficient non nul, valant 1 et situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne. Pour i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$, on pose
$$F_{i,j} = E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} - E_{j,i}.$$

6. Parmi les matrices de la forme $E_{i,j}$, lesquelles sont de carré nul ? Calculer $(F_{i,j})^2$ pour tous i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$.

7. On pose $\mathcal{H}_n = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) : \ \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Montrer que tout élément de $\mathcal{H}_n$ est une combinaison linéaire de matrices ayant l'une des formes suivantes :

Tournez la page S.V.P.

- $E_{i,j}$ avec i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$;
- $F_{i,n}$ avec $i \in [\![1, n-1]\!]$.

8. Conclure que $\Sigma_\infty \mathcal{C}(E) = \mathcal{H}(E)$.

Le résultat que l'on vient d'établir sera considérablement raffiné dans la partie E.

C Somme de trois endomorphismes de carré nul

On fixe dans cette partie un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 5$. On a démontré dans la partie précédente que tout endomorphisme de E de trace nulle est une somme d'endomorphismes de carré nul. L'objectif est ici de mettre en évidence un endomorphisme de E qui est de trace nulle mais n'est pas la somme de trois endomorphismes de carré nul.

On admet dans cette partie (et seulement dans cette partie !) le résultat suivant :

Théorème de Wang et Wu. Soit u un endomorphisme de E. Pour que u appartienne à $\Sigma_2 \mathcal{C}(E)$, il faut et il suffit qu'il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$.

On se donne un endomorphisme u de E de trace nulle. On suppose que 1 est valeur propre de u et que le sous-espace propre associé $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ est de dimension $d > \dfrac{3n}{4}$.

9. Démontrer qu'il existe effectivement un endomorphisme de E vérifiant les contraintes imposées à u.

On va établir que u ne peut pas se décomposer comme la somme de trois éléments de $\mathcal{C}(E)$. Pour cela, on pose $w = u - \mathrm{id}_E$. Soit $v \in \mathcal{C}(E)$.

10. En développant $(w - v)^2$, établir que $\mathrm{rg}\big((w - v)^2\big) < \dfrac{n}{2}$.

11. En remarquant que $\mathrm{Ker}\big((w - v)^2\big)$ est stable par $w - v$, démontrer que 1 est valeur propre de $u - v$, de multiplicité au moins $n - \mathrm{rg}\big((w - v)^2\big)$.

12. En déduire que s'il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $-(u-v) = \varphi \circ (u-v) \circ \varphi^{-1}$, alors 1

$u^2 - 2vw + \cancel{v^2}$

$u^2 - 2u + \mathrm{Id} = 0$

$\mathrm{rg}\big((w-w)^2\big) < \dfrac{n}{2}$

et -1 sont valeurs propres de $u - v$ de multiplicité strictement supérieure à $\dfrac{n}{2}$.

13. Conclure que $u \notin \Sigma_3\mathcal{C}(E)$.

D Intermède : matrices de Hessenberg

On fixe ici un entier $n \geqslant 2$. Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **de Hessenberg** lorsque

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j+1 \Rightarrow a_{i,j} = 0,$$

et on dit alors qu'une telle matrice est **régulière** lorsque

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ a_{i+1,i} \neq 0.$$

Pour un vecteur $C \in \mathbb{C}^{n-1}$, on introduit la matrice par blocs

$$E_C = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & C \\ (0) & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Pour une matrice $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et un couple $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\widetilde{B}^{(k,l)}$ la sous-matrice de B obtenue en lui retirant sa k-ième ligne et sa l-ième colonne. On note enfin

$$J_n = (\delta_{i,j+1})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

une matrice dont les seuls coefficients non nuls, tous égaux à 1, sont situés immédiatement sous la diagonale. C'est bien entendu un cas particulier de matrice de Hessenberg régulière.

14. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Hessenberg régulière. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $k-1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{C},\ \det\left(\widetilde{(xI_n - A)}^{(k,n)}\right) = P_k(x).$$

Présiser en outre le coefficient dominant de P_k. *On pourra représenter* $\widetilde{(xI_n - A)}^{(k,n)}$ *par blocs.*

Tournez la page S.V.P.

15. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Hessenberg régulière et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n et dont le coefficient sur X^{n-1} est $-\mathrm{tr}(A)$. Déduire de la question précédente qu'il existe un unique vecteur $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $A + E_C$ ait P pour polynôme caractéristique.

16. Expliciter l'unique vecteur $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $J_n + E_C$ ait X^n pour polynôme caractéristique.

17. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est une matrice de Hessenberg régulière, et l'on fixe une telle base. Montrer que $(u^k(e_1))_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de E.
On pourra examiner la matrice de cette famille de vecteurs dans $(e_1, \dots, e_n)$.

18. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Hessenberg régulière dont le polynôme caractéristique est X^n. Montrer que A est semblable à J_n.

E Somme de quatre endomorphismes de carré nul

On conserve ici les notations de la partie précédente. On fixe un entier $n \geqslant 2$. Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **presque triangulaire supérieure** lorsque $a_{i,j} = 0$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$, *sauf* pour le couple $(n, n-1)$, pour lequel $a_{n,n-1} \neq 0$.

On considère la matrice

$$V = (\delta_{i,j+1} 1_{i \neq n})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

autrement dit la matrice ayant les mêmes lignes que J_n, à l'exception de la dernière ligne, qui est nulle.

19. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice presque triangulaire supérieure. On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 0$. Justifier qu'il existe $C_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $A + V + E_{C_0}$ soit semblable à J_n.

20. Montrer que J_n est la somme de deux matrices de carré nul. *On pourra chercher les termes B_1 et B_2 d'une décomposition en imposant la contrainte qu'en toute position (i,j) on ait $(B_1)_{i,j} = 0$ ou $(B_2)_{i,j} = 0$.*

21. Soit $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ quelconque. Construire deux matrices B_1 et B_2 de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$,

telles que $V + E_C = B_1 + B_2$ et $(B_1)^2 = 0 = (B_2)^2$.

22. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe un plan vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par v et contenant au moins un vecteur non nul qui n'est pas vecteur propre de v. *On pourra s'aider d'une base de trigonalisation.*

23. En déduire que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Vect}(I_n)$ est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} B & (?) \\ (0) & C \end{pmatrix}$$
où $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $b_{2,1} \neq 0$ et où la matrice $C \in \mathrm{M}_{n-2}(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure.

24. Montrer que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Vect}(I_n)$ est semblable à une matrice presque triangulaire supérieure.

25. On se donne un espace vectoriel E de dimension finie ainsi qu'un endomorphisme u de E, supposé de trace nulle. En combinant plusieurs résultats antérieurs, démontrer que $u \in \Sigma_4 \mathcal{C}(E)$.

FIN DU PROBLÈME

Concours commun
Mines-Ponts

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.