

Probabilité qu'un entier choisi au hasard et uniformément dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ soit sans facteur à la puissance k

La partie 1 permet d'obtenir un développement en série utilisé dans la partie 2. La partie 2 n'utilise que le développement en série obtenu à la dernière question de la partie 1 et en est donc indépendante exceptée cette question. Cette partie 2 permet un calcul effectif de proche en proche des valeurs de la fonction zêta en un entier pair non nul à partir des nombres de Bernoulli.

La partie 3 est indépendante des parties 1 et 2. La partie 4 utilise les valeurs obtenues à la dernière question de la partie 2 et est donc indépendante des parties 1 et 2 exceptée cette question.

Dans les parties 3 et 4, on se donne un entier naturel non nul n et un entier naturel k vérifiant $k \geq 2$. On s'intéresse au tirage uniforme d'un entier dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ et on détermine la probabilité $q_n(k)$ que cet entier soit sans facteur à la puissance k . On montre enfin que à k fixé, la suite $(q_n(k))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente et on détermine sa limite.

Partie 1 : Calcul de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$

1 ▷ Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta t} \frac{1 - (e^{i\theta}t)^n}{1 - e^{i\theta}t} dt.$$

2 ▷ En déduire que pour $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$, la série numérique $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge, et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta t}}{1 - e^{i\theta}t} dt.$$

3 ▷ En déduire que pour $\theta \in]0; \pi[$, la série numérique $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k\theta)}{k}$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Indication : Pour $\theta \in]0; \pi[$, on pourra introduire la fonction $u_\theta : [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$u_\theta(t) = \text{Arctan} \left(\frac{t \sin(\theta)}{1 - t \cos(\theta)} \right),$$

et vérifier que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \int_0^1 \underline{u'_\theta(t)} dt.$$

4 ▷ Soit S la fonction numérique définie pour tout t réel par $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$.

Justifier que S est bien définie sur $\mathbf{R}$. Montrer que S est également continue sur $\mathbf{R}$.

5 ▷ En déduire que pour tout $\theta \in [0; \pi[$, on a :

$$S(\theta) = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} + S(0).$$

6 ▷ Pour tout x réel, on introduit la fonction numérique g_x bien définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$g_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2(n^2 + x^2)}.$$

Justifier que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto g_x(t)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et vérifie :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad g_x''(t) - x^2 g_x(t) = -S(t).$$

7 ▷ Pour un réel x non nul fixé, déterminer une solution polynomiale $t \mapsto P(t)$ de degré 2 de l'équation différentielle :

$$(E_x) : \forall t \in \mathbf{R}, \quad y''(t) - x^2 y(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{\pi t}{2} - S(0).$$

8 ▷ Pour tout réel x , calculer $g'_x(0)$ et $g'_x(\pi)$. Pour x réel non nul, montrer que :

$$g_x''(0) = -\frac{\pi}{2x} \times \frac{1 + e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}} + \frac{1}{2x^2}.$$

9 ▷ En déduire que pour tout réel x non nul :

$$\frac{2\pi x}{e^{2\pi x} - 1} = 1 - \pi x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2 + x^2}.$$

Partie 2 : Développement en série entière de $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ et applications

On introduit la fonction h , définie sur $\mathbf{R}$, par :

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

On rappelle également que la fonction zêta de Riemann est définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

10 ▷ Soient $x \in]-1; 1[$ et deux entiers naturels N et n avec $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\frac{1}{x^2 + n^2} = \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^N \left(\frac{-x^2}{n^2} \right)^k \right) + R_{N,n}(x),$$

où $R_{N,n}(x) = (-1)^{N+1} \frac{1}{x^2 + n^2} \times \frac{x^{2N+2}}{n^{2N+2}}$, et justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |R_{N,n}(x)| \leq \zeta(2N+2) |x|^{2N+2}.$$

11 ▷ Après avoir justifié que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1$, en déduire que pour $x \in]-1; 1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(2k) x^{2k}.$$

12 ▷ En déduire que la fonction h est développable en série entière, et que pour tout $x \in]-2\pi; 2\pi[$:

$$h(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} x^{2k}.$$

Pour tout k entier naturel, on pose : $b_k = h^{(k)}(0)$.

Déterminer alors b_0 et b_1 . De plus, si k est un entier naturel non nul, déterminer b_{2k} ainsi que b_{2k+1} .

13 ▷ Justifier que pour tout entier naturel n non nul : $\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = 0$.

Indication : On pourra remarquer que pour x réel non nul : $\frac{x}{e^x - 1} \times \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

14 ▷ À l'aide des valeurs de b_0 et b_1 calculées précédemment et de la question 13 ▷, calculer b_2 et b_4 .

En utilisant la question 12 ▷, déterminer les valeurs $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Partie 3 : Probabilité qu'un entier naturel choisi au hasard et uniformément dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ soit sans facteur à la puissance k

* On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On ordonne $\mathcal{P}$ par ordre croissant, et on note p_n le n -ième nombre premier. Ainsi, par exemple, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ et $p_7 = 17$.

* Soit k un entier naturel non nul tel que $k \geq 2$.

On dit qu'un entier naturel n non nul est sans facteur à la puissance k si :

$$\{p \in \mathcal{P}, p^k | n\} = \emptyset.$$

Lorsque $n \neq 1$, cela revient à dire que si n s'écrit $n = \prod_{i=1}^r q_i^{\alpha_i}$ avec des facteurs premiers q_i tous distincts, alors pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on a $\alpha_i \leq k - 1$.

15 ▷ Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout r -uplet de réels $(x_1, x_2, \dots, x_r)$:

$$\prod_{i=1}^r (1 + x_i) = 1 + \sum_{m=1}^r \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} \right),$$

où la notation $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r}$ désigne la somme sur tous les m -uplets $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$ de $\mathbb{R}^m$ qui vérifient $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r$.

Pour les deux prochaines questions 16 ▷ et 17 ▷, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

16 ▷ Soient $A, A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{A}$. Montrer que $1_{\bar{A}} = 1 - 1_A$, où 1_A désigne l'indicatrice de A .

De même, montrer que $1_{A_1} 1_{A_2} \dots 1_{A_m} = 1_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m}$.

17 ▷ En déduire que si $A_1, A_2, \dots, A_r \in \mathcal{A}$, alors :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r) = \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) \right)$$

Indication : On pourra utiliser les questions 15 ▷ et 16 ▷ et se souvenir que pour un événement A , on a $P(A) = E(1_A)$.

Pour toute la suite de cette partie, on se donne un entier naturel n non nul et on note p_r le plus grand nombre premier inférieur ou égal à n .
On a donc $p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq n$ et $p_{r+1} > n$.

On se donne également un entier k tel que $k \geq 2$.

On s'intéresse au tirage d'un entier au hasard dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ selon la loi uniforme.
On munit $\llbracket 1; n \rrbracket$ de la probabilité uniforme P_n et on note :

$$S_n(k) = \{m \in \llbracket 1; n \rrbracket : \forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket, p_j^k \nmid m\}.$$

On pose $q_n(k) = P_n(S_n(k))$ qui représente donc la probabilité que l'entier choisi soit sans facteur à la puissance k .

Pour $d \in \mathbf{N}^*$, on pose $A_n(d) = \{j \in \llbracket 1; n \rrbracket : d \mid j\}$.

18 ▷ Justifier que : $q_n(k) = 1 - P_n\left(\bigcup_{i=1}^r A_n(p_i^k)\right)$. En déduire que :

$$q_n(k) = 1 + \sum_{m=1}^r \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq r} (-1)^m P_n\left(A_n(p_{i_1}^k p_{i_2}^k \dots p_{i_m}^k)\right)$$

La fonction de Möbius $\mu : \mathbf{N}^* \rightarrow \{-1; 0; 1\}$ est la fonction définie par

$$\mu(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ (-1)^q & \text{si } m \text{ est le produit de } q \text{ nombres premiers distincts avec } q \in \mathbf{N}^* \\ 0 & \text{sinon, c'est à dire si } m \text{ contient au moins un facteur carré} \end{cases}$$

19 ▷ Justifier que :

$$q_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{+\infty} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor.$$

- 20 ▷ Montrer que la suite $(q_n(k))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente et qu'elle converge vers $\ell = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$.

Indication : on pourra introduire la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^}$, où chaque f_n est constante par morceaux sur $[1; +\infty[$ et définie par :*

$$\forall d \in \mathbf{N}^*, \forall t \in [d; d+1[, f_n(t) = \frac{1}{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor,$$

et chercher à utiliser le théorème de convergence dominée.

Partie 4 : Calcul de la somme $\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$

Pour les questions 21 ▷ et 22 ▷, on se donne un réel $s > 1$ et on pose pour $i \in \mathbf{N}^*$:

$$u_i = \frac{\mu(i)}{i^s}, \quad v_i = \frac{1}{i^s}.$$

De plus, pour $N \in \mathbf{N}^*$, on pose $E_N = \llbracket 1; N \rrbracket^2$ et $F_N = \{(i, j) \in E_N, ij \leq N\}$ et on définit

$$w_N = \sum_{d|N} |u_d| v_{\frac{N}{d}} \quad \text{et} \quad S_N = \sum_{m=1}^N w_m.$$

- 21 ▷ Pour $N \in \mathbf{N}^*$, justifier que $F_N \subset E_N \subset F_{N^2}$, et montrer que la suite $(S_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ converge.

En déduire que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{d|m} |u_d| v_{\frac{m}{d}} \right) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right),$$

où $\sum_{d|m}$ désigne la somme sur tous les entiers naturels divisant m .

- 22 ▷ Pour $N \in \mathbf{N}^*$, justifier que :

$$\left| \left(\sum_{i=1}^N u_i \right) \left(\sum_{j=1}^N v_j \right) - \sum_{m=1}^N \left(\sum_{d|m} u_d v_{\frac{m}{d}} \right) \right| \leq \sum_{(i,j) \in E_N} |u_i| v_j - \sum_{(i,j) \in F_N} |u_i| v_j.$$

En déduire que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s} \left(\sum_{d|m} \mu(d) \right) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right).$$

23 ▷ Pour $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sum_{d|m} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

24 ▷ En utilisant les questions 22 ▷ et 23 ▷, en déduire que pour $s > 1$, on a :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

25 ▷ Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(k) = \frac{1}{\zeta(k)}$.

En particulier, préciser les valeurs de $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(2)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(4)$.

FIN DU PROBLÈME