ECOLE POLYTECHNIQUE

ESPCI

CONCOURS D'ADMISSION 2026

MARDI 14 AVRIL 2026
08h00 - 12h00

FILIERES MP-MPI - Epreuve n° 3

MATHEMATIQUES B

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Notations

Si n est un entier naturel non nul, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes et à coefficients réels.

Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si i et j sont deux entiers compris entre 1 et n, on note $M_{i,j}$ le coefficient de M se trouvant à la ligne i et à la colonne j.

Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Sp}(M)$ le spectre *réel* de la matrice M, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres réelles avec leur multiplicité. Plus précisément $\mathrm{Sp}(M)$ est la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ dont les éléments sont les paires (λ, m_λ) où λ est une valeur propre réelle de M et m_λ sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique de M. On note également $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de M.

Si i et j sont deux entiers relatifs, on note $\delta_{i,j}$ l'entier 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.
Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vaut 1 sur A et 0 sur le complémentaire de A.

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires du sujet. On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On note $\mathbb{P}(A)$ la probabilité d'un événement $A \in \mathscr{A}$ et $\mathbb{E}(Z)$ l'espérance d'une variable aléatoire Z sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

Dans le sujet, pour résoudre une question, on pourra admettre le résultat des questions précédentes. La partie III est indépendante des parties I et II et la partie IV est essentiellement indépendante des parties I et II.

Préliminaire

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par les conditions

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad \forall n \geqslant 2 \quad u_n = \alpha u_{n-1} - u_{n-2}.$$

Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 0$, le terme u_n en fonction de n et de α. On distinguera soigneusement les cas suivants : $|\alpha| > 2$, $\quad |\alpha| < 2$, $\quad \alpha = 2 \quad$ et $\quad \alpha = -2$.

Première Partie

2. Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[0, 1]$. On considère les suites réelles $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$\forall n \geqslant 1, \qquad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right), \qquad w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{2n+1}\right).$$

Montrer que les suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ convergent et ont la même limite.

3a. Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[-2,2]$. Prouver que l'intégrale

$$I(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

est convergente, et que

$$I(f) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(2\cos(\theta)) \mathrm{d}\theta.$$

3b. Pour un entier naturel n, on note f_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$. Calculer la valeur de l'intégrale $I(f_n)$ pour lorsque n vaut 0, 1 et 2.

3c. Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, calculer la valeur de l'intégrale $I(f_n)$ en fonction de n.

Dans les questions qui suivent, pour tout entier $n \geqslant 1$ on considère U_n une variable aléatoire discrète uniforme à valeurs dans les entiers naturels compris entre 1 et n, c'est à dire que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}\left(U_n = k\right) = \frac{1}{n}.$$

4a. Si f est une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[-2,2]$, prouver que

$$\mathbb{E}\left(f\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} \, \mathrm{d}x.$$

4b. Prouver que, pour tout $y \in [-2,2]$,

$$\mathbb{P}\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{y} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, \mathrm{d}x.$$

Deuxième partie

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note T_n la matrice définie par la formule $(T_n)_{j,k} = \delta_{j,k+1} + \delta_{j+1,k}$, pour tous $1 \leqslant j,k \leqslant n$. Autrement dit

$$T_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note $\chi_n(X) = \det(XI_n - T_n)$ le polynôme caractéristique de T_n.

5a. Pour $n = 2$ et $n = 3$, calculer le polynôme χ_n et déterminer le spectre de T_n.

5b. Pour tout entier $n \geqslant 4$, exprimer χ_n en fonction de χ_{n-1} et χ_{n-2}.

5c. Soit α un nombre complexe tel que $|\alpha| < 2$. Établir la formule générale suivante pour $\chi_n(\alpha)$, lorsque $n \geqslant 2$,

$$\chi_n(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{4-\alpha^2}} \left(\left(\frac{\alpha + i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha - i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

5d. En déduire une expression exacte des coefficients du polynôme χ_n (on pourra donner les coefficients comme somme de produits de coefficients binomiaux).

6. Pour un entier $n \geqslant 2$, montrer que les valeurs propres de T_n sont données par la formule

$$2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad k = 1, \dots, n.$$

Si f est une fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$S_f(M) = \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \mathrm{Sp}(M)} m_\lambda f(\lambda).$$

7. Prouver que si f est définie et continue sur $[-2, 2]$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} S_f(T_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}\, \mathrm{d}x.$$

Soit un entier $n \geqslant 2$ et soient a, b, c trois nombres réels. On note $T_n(a,b,c)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$(T_n(a,b,c))_{ij} = a\delta_{i,j} + b\delta_{i+1,j} + c\delta_{i,j+1},$$

c'est-à-dire :

$$T_n(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

8a. Exprimer le spectre de $T_n(a,b,c)$ en fonction de a et du spectre de $T_n(0,b,c)$.

8b. Exprimer le spectre de $T_n(a,b,c)$ en fonction de a et du spectre de $T_n(0,bc,1)$.

8c. On suppose que $bc > 0$. Exprimer toutes les valeurs propres complexes de $T_n(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et n.
Indication : on pourra dans un premier temps se ramener au cas $b = c$.

On suppose désormais que a, b, c sont trois nombres réels avec $bc > 0$.

9a. Prouver que pour toute fonction f à valeurs réelles continue sur $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \to \infty} S_f(T_n(a,b,c)) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{2} \frac{f(a + \sqrt{bc}x)}{\sqrt{4-x^2}}\, \mathrm{d}x.$$

9b. Soit $y \in \mathbb{R}$, et $q_n(y)$ le nombre de valeurs propres de $T_n(a,b,c)$ dans l'intervalle $]-\infty, y]$. Donner un équivalent de $q_n(y)$ quand $n \to \infty$.

Troisième partie

Le but de cette partie est de donner une démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass. L'utilisation de ce théorème n'est donc pas autorisée dans les questions **10** à **12**.

Soit un entier $n \geqslant 0$. On note Q_n le polynôme $Q_n = (1 - X^n)^{2^n} \in \mathbb{R}[X]$ et P_n le polynôme $P_n = Q_n((1-X)/2)$. On note également H la fonction de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [-1,1], \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

10a. Montrer que pour tout réel $0 \leqslant \kappa < \frac{1}{2}$, la suite $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers 1 sur l'intervalle $[0, \kappa]$ et vers 0 sur l'intervalle $[1-\kappa, 1]$.

10b. En déduire que pour tout réel $0 < \eta \leqslant 1$, la suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers H sur $[-1,1] \setminus [-\eta, \eta]$.

Soit f une fonction continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et soit un réel $\varepsilon > 0$.

11. On suppose, dans cette question uniquement, que $f(-1) = 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geqslant 1$, des réels $-1 < c_1 < c_2 < \cdots < c_N < 1$ et $(a_1, \ldots, a_N) \in [-\varepsilon, \varepsilon]^N$ tels que

$$\forall x \in [-1,1], \quad \left| f(x) - \sum_{i=1}^{N} a_i H(x - c_i) \right| \leqslant \varepsilon.$$

12. En déduire qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in [-1,1], \quad |f(x) - P(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Indication : on pourra considérer un polynôme de la forme $F_{\varepsilon,n} = \sum_{i=1}^{N} a_i P_n(X - c_i)$ et choisir un réel $\eta > 0$ tel que les intervalles $[c_i - \eta, c_i + \eta]$ sont deux à deux disjoints.

Quatrième partie

On se donne une famille $(W_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ indépendantes identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}(W_{1,1}) = 0$, $\mathbb{E}(W_{1,1}^2) = 1$ et $|W_{1,1}|^k$ est d'espérance finie pour tout entier $k \geqslant 0$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, et tout $\omega \in \Omega$, on note $X_n(\omega) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall\ 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad (X_n(\omega))_{i,j} = \begin{cases} \frac{W_{i,j}(\omega)}{\sqrt{n}} & \text{si } i \leqslant j \\ \frac{W_{j,i}(\omega)}{\sqrt{n}} & \text{si } j \leqslant i. \end{cases}$$

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note $S_n(f)$ la variable aléatoire définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S_n(f)(\omega) = S_f(X_n(\omega)),$$

la notation $S_f(M)$ pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ étant définie avant la question **7**. On note également, lorsque f est continue,

$$\Sigma(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x.$$

Pour tout entier naturel $k \geqslant 0$, on note (H_k) l'hypothèse suivante.

$$(H_k) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}(\mathrm{Tr}((X_n)^k)) = \Sigma(f_k) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(\mathrm{Tr}((X_n)^k)^2) = \Sigma(f_k)^2,$$

où l'on rappelle que f_k désigne la fonction $x \mapsto x^k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

13a. Pour tout entier $k \geqslant 0$, et tout entier $n \geqslant 1$, montrer qu'on a une égalité de variables aléatoires $S_n(f_k) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(X_n^k)$.

13b. Calculer $\Sigma(f_k)$ en fonction de k pour tout entier $k \geqslant 0$.

13c. Démontrer (H_k) pour $0 \leqslant k \leqslant 2$.

Dans la suite du sujet, on suppose désormais que (H_k) est vérifiée pour tout entier $k \geqslant 0$.

14. Pour tout entier $k \geqslant 0$ et tout nombre réel $B > 0$, on note $g_{k,B}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_{k,B}(x) = |x|^k \mathbf{1}_{|x|>B}.$$

Montrer que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(S_n(f_{2k}))}{\varepsilon B^k}.$$

15. En déduire que pour tout réels $B > 4$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Indication : on pourra observer que pour $k \leqslant k'$ et $B > 4$, on a $g_{k,B} \leqslant g_{k',B}$.

On fixe désormais un réel $B > 4$.

16. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 0$ et tout réel $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle en dehors de $[-B, B]$. On fixe un réel $\varepsilon > 0$.

17a. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et un entier $N \geqslant 0$ tels que pour tout $n \geqslant N$,

$$\mathbb{P}(|S_n(f) - \Sigma(f)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|S_n(P\mathbf{1}_{|x|>B})| \geqslant \varepsilon/4) + \mathbb{P}(|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geqslant \varepsilon/4).$$

17b. Conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n(f) - \Sigma(f)| \geqslant \varepsilon) = 0.$$