

**ECOLE NORMALES SUPERIEURES  
ECOLE POLYTECHNIQUE**

**CONCOURS D'ADMISSION 2026**

**LUNDI 13 AVRIL 2026  
08h00 - 12h00**

**FILIERE PSI - Epreuve n° 1**

**MATHEMATIQUES (XUSR)**

***Durée : 4 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas  
autorisée pour cette épreuve***

# Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  et toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  on note  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Im}(A)$  les ensembles :
 
$$\begin{aligned} \text{Ker}(A) &= \{X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}, \\ \text{Im}(A) &= \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } Y = AX\}. \end{aligned}$$

La transposée d'une matrice  $A$  est notée  ${}^tA$ . Lorsque  $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ , où  $a \in \mathbb{R}$ , on identifie  $A$  au réel  $a$ .

- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  défini par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

On note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée définie par

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{{}^tXX}$$

L'espace  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  des vecteurs lignes à  $n$  composantes réelles sera identifié à  $\mathbb{R}^n$ . On notera également  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$  et par  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée, définis de la même manière que dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  on note  $X$  (lettre majuscule) le vecteur colonne appartenant à  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  défini par  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ .

Si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , on note  $\nabla f(x)$  son gradient en  $x$  défini par

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Dans toute la suite,  $n$  désigne un entier naturel non nul. Pour toute fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  on pose

$$S(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x) = 0\}.$$

On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble de toutes les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \frac{1}{2} {}^tXMX - {}^tBX, \tag{F}$$

où  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique et  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  un vecteur colonne. On dit dans ce cas que le couple  $(M, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  caractérise la fonction  $f$ . On pose

$$\mathcal{E}_0 = \{f \in \mathcal{E} \mid f \text{ minorée}\}.$$

Si  $f \in \mathcal{E}$  on définit la fonction  $Tf$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (Tf)(x) = \frac{1}{2} \|\nabla f(x)\|^2 - \frac{1}{2} \|\nabla f(0)\|^2.$$

L'un des objectifs principaux de cet énoncé et de démontrer dans des cas particuliers le théorème suivant (Boulmezaoud-Cieutat-Daniilidis) : si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , minorées et convexes (voir Partie I pour la définition) telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|\nabla f(x)\| = \|\nabla g(x)\|,$$

alors  $f - g$  est constante.

# Partie I : généralités sur les fonctions convexes et les fonctions minorées

Dans toute la suite, on dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

1. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  ;

(a) Soient  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  fixés et  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = f(x + t(y - x))$$

Exprimer  $h'(0)$  en fonction de  $x, y$  et du gradient de  $f$ .

(b) En déduire l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

(c) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0.$$

(d) Soit  $x_0 \in S(f)$ . Montrer que  $f(x_0)$  est le minimum global de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  et que

$$\forall x \in S(f), f(x) = f(x_0).$$

(e) Montrer que  $S(f)$  est une partie convexe fermée de  $\mathbb{R}^n$ .

2. On suppose dans cette question que  $f$  est minorée et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  ( $f$  n'est plus supposée convexe). Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , on définit la fonction  $f_\varepsilon$  par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}.$$

(a) Soit  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$ . Montrer qu'il existe  $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f_\varepsilon(x) \geq f_\varepsilon(x_\varepsilon).$$

Indication : on peut considérer l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_\varepsilon(x) \leq f_\varepsilon(0)\}$ .

(b) En déduire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\|\nabla f(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon.$$

(c) En déduire

$$\inf\{\|\nabla f(x)\| \mid x \in \mathbb{R}^n\} = 0.$$

$$\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \leq$$

$$\leq (1-\lambda) f(x)$$

$$f(x)$$

## Partie II : le cas monodimensionnel

3. On considère deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , convexes, minorées et vérifiant la propriété suivante : il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \underline{f_1'(x)^2 - f_2'(x)^2 = c}$$

(autrement dit, la fonction  $f_1'(x)^2 - f_2'(x)^2$  est constante). On rappelle que pour  $i \in \{1, 2\}$  :

$$S(f_i) = \{x \in \mathbb{R} \mid f_i'(x) = 0\}.$$

- (a) Montrer que  $c = 0$  et que  $S(f_1) = S(f_2)$ .  
 (b) Soit  $i \in \{1, 2\}$ . Montrer que  $f_i'$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .  
 (c) Montrer que  $S(f_1)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .  
 (d) Montrer que  $f_1' = f_2'$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 Indication : on peut distinguer les cas  $S(f_1) = \emptyset$  et  $S(f_1) \neq \emptyset$ .  
 (e) Conclure.
4. On considère maintenant une fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^2$  et minorée. On définit la fonction  $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, R(x) = g'(x)^2.$$

On suppose que  $R$  est convexe. On voudrait démontrer que  $g$  l'est aussi.

- (a) Montrer que

$$S(R) = S(g).$$

- (b) On suppose dans cette question que  $S(g) = \emptyset$ . Montrer que  $g'$  est croissante.  
 (c) On suppose dans cette question que  $S(g) \neq \emptyset$ . Montrer que  $g'$  est croissante.  
 (d) Montrer que  $g$  est convexe.  
 Indication : on peut fixer  $x, y \in \mathbb{R}$  avec  $x < y$  et considérer la fonction  $\varphi(t) = g((1-t)x + ty) - (1-t)g(x) - tg(y)$  pour  $t \in [0, 1]$ .
5. On considère deux fonctions  $g_1$  et  $g_2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^2$  minorées et vérifiant les propriétés suivantes :

- la fonction  $x \in \mathbb{R} \mapsto g_1'(x)^2 \in \mathbb{R}$  est convexe,
- il existe une constante  $c_1 \in \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_1'(x)^2 - g_2'(x)^2 = c_1.$$

$$g_1' g_2'' =$$

Montrer que  $g_1 - g_2$  est une fonction constante.

## Partie III : cas des fonctions quadratiques

6. Soit  $f \in \mathcal{E}$  et  $(M, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  un couple qui la caractérise (on rappelle que  $M$  est symétrique).

Page 4/7

$$S(g) = \emptyset$$

$$R'(z) > 0$$

$$g'(z)$$

$$R'(z) = 0$$

$$R(z) = 0$$

$$P(t) \geq 0$$

$$g''(z) = 0$$

$$P(1) = 0$$

$$P(0) = 0$$

(a) Montrer que

$${}^t(\nabla f(x)) = MX - B.$$

(b) En déduire que  $Tf \in \mathcal{E}_0$ .

(c) Montrer que  $\text{Ker}(M)^\perp = \text{Im}(M)$  et en déduire que

$$\text{Im}(M) \oplus \text{Ker}(M) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

(d) En déduire que l'application  $X \in \text{Im}(M) \mapsto MX \in \text{Im}(M)$  est un automorphisme de  $\text{Im}(M)$ .

(e) Montrer que les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes

(i)  $f \in \mathcal{E}_0$ .

(ii)  $B \in \text{Ker}(M)^\perp$  et  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXMX \geq 0$ .

(iii)  $f$  est convexe et  $S(f) \neq \emptyset$ .

(f) En déduire que si  $f \in \mathcal{E}_0$  alors il existe une constante réelle  $\alpha > 0$  telle que

$$\forall X \in \text{Im}(M), {}^tXMX \geq \alpha \|X\|^2.$$

7. Montrer que l'application  $T : f \in \mathcal{E}_0 \mapsto Tf \in \mathcal{E}_0$  est surjective.

8. Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux matrices symétriques positives telles que  $M_1^2 = M_2^2$ . Montrer que  $M_1 = M_2$ .
9. Montrer que l'application  $T : f \in \mathcal{E}_0 \mapsto Tf \in \mathcal{E}_0$  est aussi injective.
10. Conclure.

## Partie IV : un cas un peu plus général

Dans cette partie on considère deux fonctions  $f, g$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  vérifiant les quatre propriétés suivantes

- $f$  et  $g$  sont convexes minorées,
- La fonction  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|\nabla f(x)\|^2 - \|\nabla g(x)\|^2$  est constante,
- $f + g \in \mathcal{E}$ ,
- $S(f) \neq \emptyset$ .

On pose dans la suite

$$h = f + g, \psi = f - g,$$

et

$$\inf h = \inf \{h(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ainsi,  $h \in \mathcal{E}$ . On note  $(M, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  le couple matrice-vecteur colonne caractérisant  $h$ .

11. Montrer que  $h \in \mathcal{E}_0$ .

12. Montrer que nécessairement

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|\nabla f(x)\| = \|\nabla g(x)\|.$$

13. Montrer que

$$S(h) = S(f) = S(g).$$

14. Soient  $y_1, \dots, y_n$  des fonctions de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $y = (y_1, \dots, y_n)$  l'application de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$$

et on suppose que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \|y'(t)\|^2 dt$$

converge (où pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $y'(t) = (y'_1(t), \dots, y'_n(t))$ ).

(a) On définit la fonction  $z$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^n$  par

$$z(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}(y(t) - y(0)) & \text{si } t > 0, \\ y'(0) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Montrer que  $z$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et que pour tout réel  $A \geq 0$  on a

$$\int_0^A \|z(t)\|^2 dt \leq 2 \int_0^A \langle z(t), y'(t) \rangle dt.$$

(b) En déduire que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \|z(t)\|^2 dt$$

converge et qu'on a

$$\int_0^{+\infty} \|z(t)\|^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} \|y'(t)\|^2 dt.$$

(c) Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\|y(t)\|^2}{t^2 + 1} dt$$

converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\|y(t)\|^2}{t^2 + 1} dt \leq 8 \int_0^{+\infty} \|y'(t)\|^2 dt + \pi \|y(0)\|^2.$$

15. Dans toute la suite,  $Y : t \in [0, +\infty[ \mapsto {}^t(y_1(t), \dots, y_n(t)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  désigne une solution de classe  $C^1$  du système différentiel

$$Y'(t) = -MY(t) + B,$$

(E1)

On pose  $y : t \in [0, +\infty[ \mapsto (y_1(t), \dots, y_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ .

(a) Soit  $v \in S(h)$ . On définit les fonctions  $F$  et  $D$  sur  $[0, +\infty[$  par

$$\forall t \in [0, +\infty[, F(t) = h(y(t)) \quad \text{et} \quad D(t) = \|Y(t) - V\|^2$$

(on rappelle que  $V = {}^t v$ ). Montrer que  $F$  et  $D$  sont décroissantes.

Indication : on peut observer que  ${}^t \nabla h(x) = MX - B$  (voir question (6a)).

(b) Soient  $U \in \text{Im}(M)$ ,  $Y_0 \in \text{Ker}(M)$  et  $Y_1 \in \text{Im}(M)$  tels que

$$MU = B \quad \text{et} \quad Y(0) = Y_0 + Y_1.$$

On définit la fonction  $Z : [0, +\infty[ \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  par

$$\forall t \in [0, +\infty[, Z(t) = Y(t) - U - Y_0.$$

Justifier l'existence des vecteurs  $U$ ,  $Y_0$  et  $Y_1$  puis montrer que pour tout

$$\forall t \geq 0, Z'(t) = -MZ(t),$$

et en déduire que pour tout  $t \geq 0$ ,  $Z(t) \in \text{Im}(M)$ .

(c) Soit  $\omega$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $\omega(t) = \|Z(t)\|^2$  pour  $t \geq 0$ . Montrer qu'il existe un réel  $\beta > 0$  tel que

$$\forall t \geq 0, \omega'(t) + \beta\omega(t) \leq 0.$$

(d) En déduire que

$$\forall t \geq 0, \omega(t) \leq \omega(0)e^{-\beta t}.$$

(e) En déduire qu'il existe  $Y_\infty \in S(h)$  tel

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = Y_\infty.$$

(f) Montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \|y'(t)\|^2 dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\|y(t)\|^2}{t^2 + 1} dt$$

convergent et que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \|y'(t)\|^2 dt &= h(y(0)) - \inf h, \\ \int_0^{+\infty} \frac{\|y(t)\|^2}{t^2 + 1} dt &\leq 8(h(y(0)) - \inf h) + \pi \|y(0)\|^2. \end{aligned}$$

16. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla \psi(x), \nabla h(x) \rangle = 0.$$

et en déduire que la fonction  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \psi(y(t))$  est constante.

17. Montrer que la fonction  $\psi$  est constante puis conclure.

**FIN**