

Correction du sujet de modélisation

Banque Agro-Véto BCPST 2026 — Modélisation mathématique et informatique

Excellence Maths — *excellence-maths.fr*

Avertissement. Cette correction propose une rédaction complète et détaillée du sujet *Modélisation mathématique et informatique* de la banque Agro-Véto, filière BCPST, session 2026. Elle a vocation pédagogique : on y trouvera des indications sur la stratégie à adopter, les pièges classiques et plusieurs justifications plus poussées que ce que le jury attend en temps limité.

Partie I — Notion de fonction génératrice

Q 1.1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq P(X = n)t^n \leq P(X = n).$$

Comme $\sum_{n \geq 0} P(X = n) = 1$, la série $\sum_n P(X = n)t^n$ est dominée par une série positive convergente : elle converge absolument. Donc G_X est définie sur $[0, 1]$.

Q 1.2. Avec la convention $0^0 = 1$,

$$G_X(0) = P(X = 0), \quad G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1.$$

Q 1.3. Soient $0 \leq s \leq t \leq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s^n \leq t^n$ (vrai pour $n = 0$ avec $1 \leq 1$, et pour $n \geq 1$ par croissance de $u \mapsto u^n$ sur $[0, 1]$). On en déduit

$$G_X(s) = \sum_{n \geq 0} P(X = n)s^n \leq \sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n = G_X(t).$$

La fonction G_X est donc croissante sur $[0, 1]$.

Q 1.4. Par croissance, pour tout $t \in [0, 1]$, $G_X(0) \leq G_X(t) \leq G_X(1)$, soit $0 \leq P(X = 0) \leq G_X(t) \leq 1$. Donc $G_X(t) \in [0, 1]$.

Q 1.5. La variable t^X est positive et bornée : $0 \leq t^X \leq 1$ presque sûrement (car $t \in [0, 1]$ et $X \geq 0$). Par théorème de transfert, et par convergence absolue (déjà vue en Q 1.1),

$$\mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n) = G_X(t).$$

Q 1.6. On a $(t^X)^2 = t^{2X} = (t^2)^X$. La même justification donne

$$\mathbb{E}((t^X)^2) = \mathbb{E}((t^2)^X) = G_X(t^2),$$

puis $V(t^X) = \mathbb{E}((t^X)^2) - \mathbb{E}(t^X)^2 = G_X(t^2) - G_X(t)^2$. Comme $0 \leq t^X \leq 1$, on a $0 \leq (t^X)^2 \leq 1$, donc $\mathbb{E}((t^X)^2) \leq 1$ et a fortiori $V(t^X) \leq 1$.

Q 2. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Pour $t \in [0, 1]$, par formule du binôme,

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (pt + 1 - p)^n.$$

Q 3.1. (i) \Rightarrow (ii). Si $P(X \leq m) = 1$, alors $P(X = k) = 0$ pour tout $k > m$, donc

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^m P(X = k)t^k,$$

qui est un polynôme de $\mathbb{R}[t]$, défini sur \mathbb{R} .

(ii) \Rightarrow (i). Supposons G_X polynomiale, de degré d . Alors $G_X^{(k)} \equiv 0$ pour tout $k > d$. Or, par dérivation terme à terme de la série entière sur $] - 1, 1[$ (légitime puisque la série $\sum P(X = n)t^n$ a un rayon de convergence ≥ 1),

$$G_X^{(k)}(0) = k! P(X = k).$$

Donc $P(X = k) = 0$ pour tout $k > d$, soit $P(X \leq d) = 1$. Il suffit de prendre $m = d$.

Q 3.2. Sous (i), X est presque sûrement bornée par m ; comme somme finie, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^m k P(X = k)$ existe. Par ailleurs $G_X(t) = \sum_{k=0}^m P(X = k)t^k$ est polynomiale, donc dérivable sur \mathbb{R} (en particulier en 1). On obtient

$$G_X'(1) = \sum_{k=1}^m k P(X = k) = \sum_{k=0}^m k P(X = k) = \mathbb{E}(X).$$

Q 4. (i) \Rightarrow (ii). Évident : si X et Y ont même loi, alors $P(X = n) = P(Y = n)$ pour tout n et donc $G_X = G_Y$ sur $[0, 1]$.

(ii) \Rightarrow (i). Comme X et Y sont à valeurs dans $\{0, \dots, m\}$, G_X et G_Y sont des polynômes de degré $\leq m$ (par Q 3.1). Si $G_X(t) = G_Y(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors le polynôme $G_X - G_Y$ admet une infinité de racines : il est identiquement nul. Par identification des coefficients, $P(X = k) = P(Y = k)$ pour $k \in \{0, \dots, m\}$. Donc X et Y ont même loi.

Partie II — Sommes aléatoires : un premier modèle

II.A. Présentation du modèle

Q 5. La variable J_1 compte le nombre de jacinthes ayant atteint le seuil parmi n plantes. Par (A1), chaque plante atteint le seuil avec probabilité p_1 ; par (A3), les comportements sont indépendants. On reconnaît le schéma de Bernoulli :

$$J_1 \sim \mathcal{B}(n, p_1).$$

Q 6. Avec $n = 2$, $p_1 = 2/3$, $p_2 = 3/4$. On note que $p_1 p_2 = 1/2$. On va vérifier directement que $J_2 \sim \mathcal{B}(2, 1/2)$; les questions 8 à 11 donneront la loi générale.

Sachant $J_1 = i$, le nombre de jacinthes qui fleurissent parmi les i retenues suit la loi $\mathcal{B}(i, p_2)$. La loi totale donne :

$$\begin{aligned} P(J_2 = 0) &= P(J_1 = 0) + P(J_1 = 1) \cdot \frac{1}{4} + P(J_1 = 2) \cdot \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{16} = \frac{4+4+1}{36} = \frac{1}{4}, \\ P(J_2 = 1) &= P(J_1 = 1) \cdot \frac{3}{4} + P(J_1 = 2) \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \\ P(J_2 = 2) &= P(J_1 = 2) \cdot \frac{9}{16} = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{16} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On a bien $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$, et l'on reconnaît la loi $\mathcal{B}(2, 1/2)$.

Q 7.1. Le code complété est :

```

1 def J2(n, p1, p2):
2     aux = 0
3     l = [0 for i in range(n)]
4     for i in range(n):
5         if rd.binomial(1, p1) == 1: # succes a l'etape 1

```

```

6         l[i] = 1
7     for i in range(n):
8         if l[i] == 1:                               # plante retenue
9             if rd.binomial(1, p2) == 1:
10                aux = aux + 1
11     return aux

```

Q 7.2. La première boucle (lignes 4 à 6) simule la *phase de croissance* : pour chacune des n jacinthes, on tire indépendamment un succès Bernoulli de paramètre p_1 ; si la plante atteint le seuil, on marque $l[i]=1$. À la sortie de la première boucle, l est l'indicatrice des plantes qui ont franchi l'étape 1 : la somme des éléments de l est une réalisation de J_1 .

La seconde boucle (lignes 7 à 10) simule la *phase de floraison* : pour chaque plante retenue à l'issue de l'étape 1, on tire un succès Bernoulli de paramètre p_2 et l'on incrémente aux . La valeur finale de aux est une réalisation de J_2 .

II.B. Loi de J_2

Q 8.1. La variable J_1 prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$. Pour $i \neq j$, $(J_1 = i) \cap (J_1 = j) = \emptyset$, et $\bigcup_{i=0}^n (J_1 = i) = \Omega$. Donc $((J_1 = i))_{i \in \{0, \dots, n\}}$ est un système complet d'événements.

Q 8.2. Comme $J_1 \sim \mathcal{B}(n, p_1)$ avec $p_1 \in]0, 1[$,

$$P(J_1 = i) = \binom{n}{i} p_1^i (1 - p_1)^{n-i} > 0.$$

Sachant l'événement $(J_1 = i)$, on a i plantes retenues à l'issue de l'étape 1. Par (A2), chacune fleurit avec probabilité p_2 ; par (A4), cette capacité est indépendante de la phase 1 ; par (A3), les plantes fleurissent indépendamment les unes des autres. La loi conditionnelle de J_2 sachant $(J_1 = i)$ est donc :

$$J_2 \mid (J_1 = i) \sim \mathcal{B}(i, p_2).$$

Q 8.3. Par la formule des probabilités totales, pour $\ell \in \{0, \dots, n\}$,

$$P(J_2 = \ell) = \sum_{i=0}^n P(J_1 = i) P(J_2 = \ell \mid J_1 = i).$$

Or $P(J_2 = \ell \mid J_1 = i) = 0$ dès que $i < \ell$. Pour $i \geq \ell$,

$$P(J_2 = \ell \mid J_1 = i) = \binom{i}{\ell} p_2^\ell (1 - p_2)^{i-\ell}.$$

On en déduit

$$P(J_2 = \ell) = \sum_{i=\ell}^n \binom{i}{\ell} p_2^\ell (1 - p_2)^{i-\ell} \binom{n}{i} p_1^i (1 - p_1)^{n-i}.$$

Q 8.4. Calcul direct des coefficients binomiaux :

$$\binom{i}{\ell} \binom{n}{i} = \frac{i!}{\ell!(i-\ell)!} \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{\ell!(i-\ell)!(n-i)!}.$$

On factorise par $\frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} = \binom{n}{\ell}$:

$$\frac{n!}{\ell!(i-\ell)!(n-i)!} = \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \cdot \frac{(n-\ell)!}{(i-\ell)!(n-i)!} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{i-\ell}.$$

Q 8.5. En injectant Q 8.4 dans Q 8.3 et en posant le changement de variable $j = i - \ell$ (donc $i = j + \ell$, j varie de 0 à $n - \ell$) :

$$\begin{aligned}
 P(J_2 = \ell) &= \binom{n}{\ell} p_2^\ell \sum_{i=\ell}^n \binom{n-\ell}{i-\ell} p_1^i (1-p_1)^{n-i} (1-p_2)^{i-\ell} \\
 &= \binom{n}{\ell} p_2^\ell p_1^\ell \sum_{j=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{j} (p_1(1-p_2))^j (1-p_1)^{n-\ell-j} \\
 &= \binom{n}{\ell} (p_1 p_2)^\ell (p_1(1-p_2) + (1-p_1))^{n-\ell} \\
 &= \binom{n}{\ell} (p_1 p_2)^\ell (1-p_1 p_2)^{n-\ell}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît la loi binomiale : $J_2 \sim \mathcal{B}(n, p_1 p_2)$.

Q 9. La commande tire d'abord i selon une loi $\mathcal{B}(n, p_1)$: i est une réalisation de J_1 . Puis elle tire et renvoie une réalisation d'une variable de loi $\mathcal{B}(i, p_2)$, soit la loi conditionnelle de J_2 sachant $J_1 = i$ (Q 8.2). Par construction, la variable aléatoire renvoyée par `mystere1(n, p1, p2)` suit donc la même loi que J_2 , c'est-à-dire $\mathcal{B}(n, p_1 p_2)$.

Q 10.1. On numérote arbitrairement les n jacinthes de 1 à n et on désigne par X_k l'indicatrice de la floraison de la k -ième jacinthe (pour $k \in \{1, \dots, n\}$), évaluée *si elle a passé l'étape 1*. Par (A2), $X_k \sim \mathcal{B}(p_2)$; par (A3) et (A4), les X_k sont indépendantes entre elles et indépendantes de tout ce qui relève de la phase de croissance, donc indépendantes de J_1 . Quitte à réindexer pour faire apparaître en premier les plantes ayant passé l'étape 1, le nombre de jacinthes finalement retenues s'écrit

$$J_2 = \sum_{k=1}^{J_1} X_k,$$

avec la convention de somme vide nulle lorsque $J_1 = 0$.

Q 10.2. On admet la formule $G_{J_2} = G_{J_1} \circ G_{X_1}$ (composition des fonctions génératrices pour une somme aléatoire). En utilisant Q 2 et Q 5 :

$$G_{X_1}(t) = p_2 t + 1 - p_2, \quad G_{J_1}(s) = (p_1 s + 1 - p_1)^n.$$

Donc

$$G_{J_2}(t) = (p_1(p_2 t + 1 - p_2) + 1 - p_1)^n = (p_1 p_2 t + 1 - p_1 p_2)^n.$$

Q 10.3. On reconnaît la fonction génératrice de la loi $\mathcal{B}(n, p_1 p_2)$ (Q 2). Par Q 4, J_2 suit cette loi : $J_2 \sim \mathcal{B}(n, p_1 p_2)$.

Q 11.1. Pour une plante donnée, l'événement « être finalement retenue » équivaut à « passer l'étape 1 » (proba p_1 , par (A1)) *et* « fleurir » (proba p_2 , par (A2)). Par (A4), ces deux événements sont indépendants. Donc la probabilité d'être retenue est $p_1 p_2$.

Q 11.2. Par (A3), les n plantes sont indépendantes. Chacune est retenue avec probabilité $p_1 p_2$, indépendamment des autres. Le nombre J_2 de plantes retenues est donc binomial : $J_2 \sim \mathcal{B}(n, p_1 p_2)$.

Q 12. Pour chaque plante $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la commande tire deux Bernoulli indépendantes : `hauteur_i` $\sim \mathcal{B}(p_1)$ et `floraison_i` $\sim \mathcal{B}(p_2)$. La plante est comptabilisée dans `aux` si et seulement si les deux indicatrices valent 1, c'est-à-dire si la plante atteint le seuil *et* fleurit. Par Q 11.1, cet événement a la probabilité $p_1 p_2$. Les n plantes étant indépendantes, `aux` compte le nombre de succès parmi n épreuves indépendantes de paramètre $p_1 p_2$. La variable simulée par `mystere2(n, p1, p2)` suit donc la loi $\mathcal{B}(n, p_1 p_2)$, c'est-à-dire la loi de J_2 .

Partie III — Sommes aléatoires : un second modèle

III.A. Présentation du modèle

Q 13. Les hypothèses traduisent les comportements suivants :

- (H3) : toutes les euglènes ont *le même comportement reproductif* : chacune, quels que soient le jour j et son indice k , engendre un nombre de descendants distribué selon la même loi (celle de D).
- (H5) : le nombre de descendants engendrés en une journée par une euglène est *majoré par m* : aucune euglène ne peut produire plus de m descendants.
- (H6) : les nombres de descendants engendrés par les différentes euglènes (à différents jours et à différents indices) sont *mutuellement indépendants* : la reproduction d'une euglène n'a aucune influence sur celle des autres ni sur la sienne propre à un autre jour.

Q 14. Par définition $N_0 = 1$ et $N_1 = \sum_{k=1}^{N_0} D_{0,k} = D_{0,1}$. Or par (H3), $D_{0,1}$ suit la même loi que D . Donc N_1 suit la loi de D .

Q 15. On démontre la propriété par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $N_0 = 1$ et $\{0, 1, \dots, m^0\} = \{0, 1\}$ (puisque $m^0 = 1$), donc $N_0 \in \{0, 1, \dots, m^0\}$.

Hérédité : supposons $N_j \in \{0, 1, \dots, m^j\}$. Par construction, $N_{j+1} = \sum_{k=1}^{N_j} D_{j,k} \geq 0$ et, par (H5), chaque $D_{j,k} \leq m$; donc

$$N_{j+1} \leq N_j \cdot m \leq m^j \cdot m = m^{j+1}.$$

Par convention de somme vide, $N_{j+1} = 0$ si $N_j = 0$. Dans tous les cas, $N_{j+1} \in \{0, 1, \dots, m^{j+1}\}$.

Q 16. Soit $n \in S$, c'est-à-dire $p_n = P(D = n) > 0$. Par (H4), D est à valeurs dans $\{0, \dots, m\}$, donc $P(D = n) = 0$ pour tout $n > m$. Ainsi $n \leq m$ et $S \subset \{0, 1, \dots, m\}$. Toujours par (H4), $P(D = m) > 0$, donc $m \in S$.

Q 17.1. Représentations arborescentes :



Q 17.2. Par (H3) et (H6), les variables $D_{0,1}$ et $D_{1,1}, D_{1,2}, D_{1,3}, D_{1,4}$ sont indépendantes et de même loi que D ; donc

$$P(A_1) = P(D_{0,1} = 4) \cdot P(D_{1,1} = 0) \cdot P(D_{1,2} = 2) \cdot P(D_{1,3} = 1) \cdot P(D_{1,4} = 0) = p_4 p_0^2 p_1 p_2.$$

De même,

$$P(A_2) = P(D_{0,1} = 3) \cdot P(D_{1,1} = 0) \cdot P(D_{1,2} = 0) \cdot P(D_{1,3} = 0) = p_3 p_0^3.$$

Q 17.3. Par hypothèse $\{0, 1, 2, 3, 4\} \subset S$, donc $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 > 0$. Comme produit de réels strictement positifs, $P(A_1) > 0$ et $P(A_2) > 0$.

Q 17.4. Sur A_1 , $D_{0,1} = 4$, donc $N_1 = D_{0,1} = 4$. Puis

$$N_2 = \sum_{k=1}^{N_1} D_{1,k} = D_{1,1} + D_{1,2} + D_{1,3} + D_{1,4} = 0 + 2 + 1 + 0 = 3.$$

Donc $A_1 \subset (N_2 = 3)$. L'entier $n = 3$ est l'unique tel entier puisque la valeur de N_2 est entièrement déterminée sur A_1 .

Q 17.5. Considérons l'événement $B = (D_{0,1} = 1, D_{1,1} = 3)$: sur B , $N_1 = 1$ et $N_2 = D_{1,1} = 3$. Donc $B \subset (N_2 = 3)$ et $B \cap A_1 = \emptyset$ (car $D_{0,1}$ y prend deux valeurs distinctes, 1 et 4). Par (H6), $P(B) = p_1 p_3 > 0$. D'où

$$P(N_2 = 3) \geq P(A_1) + P(B) > P(A_1).$$

III.B. Étude de la population moyenne

Q 18.1. La variable N_j est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les variables $\{D_{i,k} : 0 \leq i \leq j-1, 1 \leq k \leq m^i\}$ (en effet, N_j se reconstruit par récurrence à partir de ces $D_{i,k}$). Or, par (H6), les variables $D_{j,1}, D_{j,2}, \dots, D_{j,m^j}$ sont indépendantes entre elles et indépendantes de toute la famille $\{D_{i,k} : i < j\}$. Par conséquent, les $m^j + 1$ variables $D_{j,1}, \dots, D_{j,m^j}, N_j$ sont mutuellement indépendantes.

Q 18.2. Par Q 15, $N_j \in \{0, \dots, m^j\}$. La famille $((N_j = t))_{0 \leq t \leq m^j}$ est un système complet d'événements (cf. Q 8.1). Soit $n \in \{0, \dots, m^{j+1}\}$. Par formule des probabilités totales :

$$P(N_{j+1} = n) = \sum_{t=0}^{m^j} P(N_j = t, N_{j+1} = n).$$

Sur $(N_j = t)$, $N_{j+1} = \sum_{k=1}^t D_{j,k}$ (avec convention de somme vide si $t = 0$). Par Q 18.1, N_j est indépendante des $D_{j,k}$, donc :

$$P(N_j = t, N_{j+1} = n) = P(N_j = t) \cdot P\left(\sum_{k=1}^t D_{j,k} = n\right).$$

Ce qui donne

$$P(N_{j+1} = n) = \sum_{t=0}^{m^j} P(N_j = t) P\left(\sum_{k=1}^t D_{j,k} = n\right).$$

Q 18.3. D est à valeurs dans $\{0, \dots, m\}$, donc bornée et son espérance $\mathbb{E}(D)$ existe. N_j est à valeurs dans $\{0, \dots, m^j\}$ (Q 15), donc bornée et $\mathbb{E}(N_j)$ existe ; idem pour N_{j+1} .

Calculons $\mathbb{E}(N_{j+1})$ avec Q 18.2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_{j+1}) &= \sum_{n=0}^{m^{j+1}} n P(N_{j+1} = n) = \sum_n n \sum_{t=0}^{m^j} P(N_j = t) P\left(\sum_{k=1}^t D_{j,k} = n\right) \\ &= \sum_{t=0}^{m^j} P(N_j = t) \sum_n n P\left(\sum_{k=1}^t D_{j,k} = n\right) \\ &= \sum_{t=0}^{m^j} P(N_j = t) \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^t D_{j,k}\right) \\ &= \sum_{t=0}^{m^j} P(N_j = t) t \mathbb{E}(D) = \mathbb{E}(D) \mathbb{E}(N_j). \end{aligned}$$

(Pour la troisième ligne : par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^t D_{j,k}) = t \mathbb{E}(D)$, avec convention 0 si $t = 0$.)

Q 18.4. Récurrence sur j . $\mathbb{E}(N_0) = 1 = \mathbb{E}(D)^0$. Si $\mathbb{E}(N_j) = \mathbb{E}(D)^j$, alors par Q 18.3 :

$$\mathbb{E}(N_{j+1}) = \mathbb{E}(D) \mathbb{E}(N_j) = \mathbb{E}(D)^{j+1}.$$

Q 19. Si $\mathbb{E}(D) > 1$, alors $\mathbb{E}(N_j) = \mathbb{E}(D)^j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$: la population moyenne explose exponentiellement. Une telle croissance est irréaliste pour une population biologique, qui se heurterait à la limitation des ressources (nutriments, espace), à la prédation, à la compétition intra-spécifique, etc.

L'hypothèse (H2), qui suppose qu'aucune eugène ne vit plus d'une journée, suppose implicitement une reproduction « indépendante des conditions » : aucune rétroaction de la densité de population sur le taux de reproduction. C'est cette hypothèse qui empêche le modèle de capter le phénomène de saturation. Le modèle de Galton-Watson convient à des populations en phase initiale (à faible effectif) mais cesse d'être pertinent pour décrire la dynamique à long terme dans le régime sur-critique.

III.C. Calcul de la probabilité d'extinction : étude d'exemples

Résultat admis : α est la plus petite solution dans $[0, 1]$ de l'équation $G_D(t) - t = 0$. Il sera démontré en III.D.

Q 20. Cas A_1 . Sur A_1 , on a $N_2 = 3$ (Q 17.4) : trois euglènes sont vivantes au jour 2. À partir du jour 2, par (H6) et (H3), les trois sous-arbres engendrés par ces trois euglènes sont indépendants entre eux et indépendants du passé (donc de A_1). Chacun s'éteint avec probabilité α (par stationnarité du processus, chaque sous-arbre est lui-même un processus de Galton-Watson de loi de descendance D démarrant à 1 euglène). Pour que la population entière s'éteigne, il faut et il suffit que les trois sous-arbres s'éteignent. Par indépendance :

$$P(E_0 | A_1) = \alpha^3.$$

Cas A_2 . Sur A_2 , $N_2 = D_{1,1} + D_{1,2} + D_{1,3} = 0$: la population est déjà éteinte au jour 2. Donc $A_2 \subset E_0$, ce qui donne

$$P(E_0 | A_2) = 1.$$

(En convenant qu'une réunion vide d'événements est l'ensemble vide d'événement contraire et qu'une intersection vide a probabilité 1, on note l'égalité formelle $P(E_0 | A_2) = \alpha^0 = 1$.)

Q 21.1. On a $p_0 = 1 - p$ et $p_2 = p$ avec $p \in]0, 1]$. Donc D est à valeurs dans $\{0, 1, 2\} \subset \{0, \dots, 2\}$, et $P(D = 2) = p > 0$. L'hypothèse (H4) est satisfaite avec $m = 2$.

Q 21.2. $G_D(t) = p_0 + p_2 t^2 = (1 - p) + p t^2$. L'équation $G_D(t) - t = 0$ s'écrit

$$p t^2 - t + (1 - p) = 0.$$

Discriminant : $\Delta = 1 - 4p(1 - p) = (2p - 1)^2 \geq 0$. Les racines sont

$$t = \frac{1 \pm |2p - 1|}{2p}.$$

Une racine vaut toujours 1. L'autre vaut $\frac{1-p}{p}$.

Si $p \leq 1/2$: $\frac{1-p}{p} \geq 1$. La plus petite racine dans $[0, 1]$ est 1, donc $\alpha_p = 1$.

Si $p > 1/2$: $\frac{1-p}{p} < 1$. La plus petite racine dans $[0, 1]$ est $\frac{1-p}{p}$, donc $\alpha_p = \frac{1-p}{p}$.

$$\alpha_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq 1/2, \\ \frac{1-p}{p} & \text{si } p > 1/2. \end{cases}$$

Q 21.3. Sur $]0, \frac{1}{2}]$, $\alpha_p = 1$: constante.

Sur $]\frac{1}{2}, 1]$, $\alpha_p = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$: dérivée $-\frac{1}{p^2} < 0$, donc strictement décroissante.

En $p = 1/2$, $\alpha_p = 1$ et la fonction est continue. En $p = 1$, $\alpha_1 = 0$.

Interprétation. Plus p est grand, plus une euglène a tendance à se reproduire (probabilité p d'engendrer 2 descendants, $1-p$ d'en engendrer 0). En-dessous d'un certain seuil ($p = 1/2$, qui correspond à $\mathbb{E}(D) = 2p = 1$), l'extinction est certaine. Au-delà du seuil, l'extinction devient improbable et la probabilité d'extinction décroît continûment vers 0 quand $p \rightarrow 1$.

Q 22.1. À l'entrée du tour de boucle de la ligne 3, N contient le nombre d'euglènes vivantes au jour courant (initialement 1, c'est N_0). Les lignes 4 à 6 calculent le nombre d'euglènes au jour suivant : on initialise un compteur **aux** à 0, puis pour chaque euglène vivante (k variant de 0 à $N-1$), on simule son nombre de descendants via `simule_D()` et on l'ajoute au compteur. À la fin de la boucle, **aux** vaut $\sum_{k=1}^N D_{j,k} = N_{j+1}$, soit le nombre d'euglènes au jour suivant. La ligne 7 actualise alors N en cette nouvelle valeur.

Q 22.2. La variable N_1 de la ligne 16 modélise le nombre de descendants engendrés par l'euglène racine au jour 1, c'est-à-dire $D_{0,1}$. Comme $N_0 = 1$, c'est aussi N_1 , le nombre d'euglènes vivantes au jour 1.

Q 22.3. `extinction_iter` effectue un *parcours en largeur* (BFS) implicite de l'arbre généalogique : à chaque tour de la boucle externe, on traite l'intégralité d'un « niveau » (un jour) avant de passer au niveau suivant. La structure de l'arbre n'est jamais matérialisée : seul le nombre total d'euglènes par niveau est stocké dans la variable N .

`extinction_rec` effectue un *parcours en profondeur* (DFS) : pour chaque descendant de la racine, on appelle récursivement la fonction qui simule la lignée issue de ce descendant jusqu'au jour $j - 1$, avant de passer au descendant suivant.

Comparaison d'efficacité.

- **Mémoire** : `extinction_iter` est économe (la variable N stocke un unique entier, mémoire $O(1)$). `extinction_rec` empile les appels récursifs : la profondeur de pile peut atteindre j , soit une mémoire en $O(j)$.
- **Court-circuit** : `extinction_iter` sort dès que $N==0$: utile en régime sous-critique, où la population s'éteint rapidement. `extinction_rec` sort dès qu'une lignée survit jusqu'au jour j : utile en régime sur-critique, où une survie rapide est probable.
- **Nombre de simulations** : dans le pire cas (pas de court-circuit), les deux fonctions appellent `simule_D()` une fois par nœud non terminal de l'arbre.

En pratique, `extinction_iter` est généralement préférable : mémoire constante, pas d'explosion de la pile d'appels et logique plus simple à raisonner.

Q 23.1. $p_0 = p_2 = 1/2$, donc $D \in \{0, 2\} \subset \{0, 1, 2\}$ et $P(D = 2) = 1/2 > 0$: (H4) est satisfaite avec $m = 2$.

Q 23.2. $G_D(t) = \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}$. L'équation $G_D(t) = t$ s'écrit

$$\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} = 0 \iff t^2 - 2t + 1 = 0 \iff (t - 1)^2 = 0,$$

soit $t = 1$ racine double. La plus petite (et unique) solution dans $[0, 1]$ est $1 : \alpha = 1$.

L'événement E_0 « la population finit par disparaître » a probabilité 1. Or $(J = 0) = (E(\omega) = \emptyset)$ correspond au cas où la population ne s'éteint jamais, c'est-à-dire E_0^c . Donc

$$P(J = 0) = P(E_0^c) = 1 - \alpha = 0.$$

Q 23.3. On a $j P(J = j) \sim \frac{2}{j}$ quand $j \rightarrow +\infty$, série de terme général équivalent au terme général de la série harmonique : la série $\sum j P(J = j)$ *diverge*. La variable J n'admet donc pas d'espérance.

Q 23.4. Sur cet exemple ($p_0 = p_2 = 1/2$), une euglène engendre soit 0 descendant (probabilité $1/2$, extinction immédiate à la génération suivante : temps d'extinction = 1), soit 2 descendants (probabilité $1/2$, deux lignées indépendantes à étudier). Si les deux lignées s'éteignent en temps t_1 et t_2 respectivement, la lignée globale s'éteint au jour $1 + \max(t_1, t_2)$.

```

1 def temps_extinction():
2     if rd.binomial(1, 1/2) == 0:      # D = 0 (proba 1/2)
3         return 1
4     else:                             # D = 2 (proba 1/2)
5         t1 = temps_extinction()
6         t2 = temps_extinction()
7         return 1 + max(t1, t2)

```

III.D. Calcul de la probabilité d'extinction : étude générale

Q 24.1. Inclusion $E_0 \subset \bigcup_{j \geq 0} (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$. Soit $\omega \in E_0$: il existe $j \geq 0$ tel que $N_j(\omega) = 0$. L'ensemble $\{j \geq 0 : N_j(\omega) = 0\}$ est non vide et minoré, soit j_0 son minimum. Comme $N_0 = 1$, on a $j_0 \geq 1$. Posons $k = j_0 - 1 \geq 0$. Par minimalité de j_0 , $N_k(\omega) \neq 0$, et $N_{k+1}(\omega) = N_{j_0}(\omega) = 0$. Donc $\omega \in (N_{k+1} = 0, N_k \neq 0)$.

Inclusion réciproque. Si $\omega \in (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$, alors $N_{j+1}(\omega) = 0$, donc $\omega \in E_0$.

Q 24.2. On démontre l'égalité ensembliste par double inclusion.

⊂. Soit ω tel que $N_{j+1}(\omega) = 0$. Si $N_j(\omega) = 0$, alors $\omega \in (N_j = 0)$. Sinon $N_j(\omega) \neq 0$, et $\omega \in (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$.

⊃. Si $\omega \in (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$, alors $N_{j+1}(\omega) = 0$. Si $\omega \in (N_j = 0)$, alors $N_{j+1}(\omega) = \sum_{k=1}^0 D_{j,k} = 0$ (somme vide).

Disjonction : les événements $(N_j = 0)$ et $(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$ sont incompatibles (le second exige $N_j \neq 0$).

D'où l'égalité d'union disjointe :

$$(N_{j+1} = 0) = (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \sqcup (N_j = 0).$$

Q 24.3. La famille $((N_{j+1} = 0, N_j \neq 0))_{j \geq 0}$ est une famille *disjointe* : si $\omega \in (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \cap (N_{j'+1} = 0, N_{j'} \neq 0)$ avec $j < j'$, alors $N_{j+1}(\omega) = 0$. Or l'extinction est irréversible : si $N_{j+1}(\omega) = 0$, alors $N_i(\omega) = 0$ pour tout $i \geq j+1$ (somme vide propagée). En particulier $N_{j'}(\omega) = 0$, ce qui contredit $N_{j'} \neq 0$.

Par Q 24.1 et σ -additivité,

$$\alpha = P(E_0) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0).$$

Par Q 24.2, $P(N_{j+1} = 0) = P(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) + P(N_j = 0)$, soit $a_{j+1} - a_j = P(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$. Donc

$$\alpha = \sum_{j=0}^{+\infty} (a_{j+1} - a_j).$$

Q 24.4. La somme partielle est télescopique : $\sum_{j=0}^J (a_{j+1} - a_j) = a_{J+1} - a_0$. Or $a_0 = P(N_0 = 0) = P(1 = 0) = 0$. Donc

$$\alpha = \lim_{J \rightarrow +\infty} a_{J+1} = \lim_{j \rightarrow +\infty} a_j.$$

Remarque : la suite (a_j) est croissante (chaque terme général de la série est positif) et bornée par 1 : elle converge donc, et sa limite est $\alpha \in [0, 1]$.

Q 25.1. Par Q 14, $N_1 \sim D$. La famille $((N_1 = n))_{n \in S} \cup \{(N_1 \notin S)\}$ partitionne Ω ; comme $P(N_1 \notin S) = 0$ (par définition de S), la formule des probabilités totales donne

$$a_{j+1} = P(N_{j+1} = 0) = \sum_{n \in S} P(N_{j+1} = 0 \mid N_1 = n) P(N_1 = n) = \sum_{n \in S} p_n P(N_{j+1} = 0 \mid N_1 = n).$$

Q 25.2. Soient $j \in \mathbb{N}^*$ et $n \in S$. Sachant $(N_1 = n)$, on a n euglènes vivantes au jour 1. Pour chacune $k \in \{1, \dots, n\}$, notons $T_k^{(j)}$ l'événement « la sous-lignée issue de l'euglène k au jour 1 est éteinte au jour $j+1$ ». Par (H6) et stationnarité du processus, les événements $T_1^{(j)}, \dots, T_n^{(j)}$ sont mutuellement indépendants et chacun a la probabilité a_j (probabilité d'extinction en j jours d'un processus de Galton-Watson démarrant à 1 euglène, par identité en loi avec le processus (N_i)). On a

$$(N_{j+1} = 0) \cap (N_1 = n) = \bigcap_{k=1}^n T_k^{(j)} \cap (N_1 = n).$$

Par indépendance,

$$P(N_{j+1} = 0 \mid N_1 = n) = \prod_{k=1}^n P(T_k^{(j)}) = (a_j)^n.$$

Q 25.3. En injectant Q 25.2 dans Q 25.1 :

$$a_{j+1} = \sum_{n \in S} p_n (a_j)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n (a_j)^n = G_D(a_j).$$

(L'extension de la somme à \mathbb{N} est licite : pour $n \notin S$, $p_n = 0$.) Par ailleurs, pour $j = 0$: $a_0 = 0$ et $a_1 = P(N_1 = 0) = p_0 = G_D(0)$, ce qui prolonge la formule à $j = 0$.

Q 25.4. G_D est continue sur $[0, 1]$ (polynôme par H4/H5, ou plus généralement somme uniformément convergente sur tout compact $[0, 1]$). Par Q 24.4, $a_j \rightarrow \alpha$; par Q 25.3, $a_{j+1} = G_D(a_j)$. En passant à la limite :

$$\alpha = G_D(\alpha).$$

Donc $\alpha \in F$.

Q 25.5. Soit $t \in F$. On démontre $a_j \leq t$ par récurrence sur j .

Initialisation : $a_0 = 0 \leq t$ (puisque $t \in [0, 1]$).

Hérédité : si $a_j \leq t$, alors par croissance de G_D sur $[0, 1]$ (Q 1.3 appliquée à D) et $G_D(t) = t$,

$$a_{j+1} = G_D(a_j) \leq G_D(t) = t.$$

Q 25.6. Par passage à la limite dans Q 25.5, $\alpha = \lim a_j \leq t$ pour tout $t \in F$. Comme $\alpha \in F$ (Q 25.4), $\alpha = \min F$.

Q 26. $\alpha = 0 \Leftrightarrow G_D(0) = 0 \Leftrightarrow p_0 = 0$. Par Q 25.4, $\alpha \in F$, et l'on remplace dans la définition de F .

Sens direct. Si $\alpha = 0$, alors $G_D(0) = 0$, c'est-à-dire $p_0 = 0$.

Réciproque. Si $p_0 = 0$, alors $0 \in F$ (car $G_D(0) = 0 = t$). Comme $\alpha = \min F$ et $\alpha \geq 0$, on a $\alpha = 0$.

Q 27.1. G_D est polynomiale de degré $\leq m$ (par H4/H5, cf. Q 3.1). Donc $G_D \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et $f = G_D - \text{id}$ aussi : f est en particulier deux fois dérivable sur $[0, 1]$.

Q 27.2. Pour $t \in [0, 1]$,

$$f''(t) = G_D''(t) = \sum_{n=2}^m n(n-1)p_n t^{n-2}.$$

Par (H4), $p_m > 0$ avec $m \geq 2$, donc $m(m-1)p_m t^{m-2} \geq 0$ sur $[0, 1]$ et est strictement positif sur $]0, 1[$ (avec en outre $f''(t) > 0$ sur tout $]0, 1[$ puisque tous les termes sont positifs et celui d'indice m est strictement positif).

Donc f' est strictement croissante sur $[0, 1]$: pour $0 \leq a < b \leq 1$,

$$f'(b) - f'(a) = \int_a^b f''(t) dt > 0$$

(intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $[a, b]$).

Q 27.3. $f'(t) = G_D'(t) - 1 = \sum_{n=1}^m n p_n t^{n-1} - 1$, donc $f'(0) = p_1 - 1$. Or $\sum_{n=0}^m p_n = 1$ et, par (H4), $p_m > 0$ avec $m \geq 2 \neq 1$. Donc

$$p_1 \leq 1 - p_m < 1,$$

soit $f'(0) = p_1 - 1 < 0$.

Q 28.1. On suppose $\mathbb{E}(D) \leq 1$. Or $\mathbb{E}(D) = G_D'(1)$ (par Q 3.2 appliquée à D , qui satisfait (H4)). Donc

$$f'(1) = G_D'(1) - 1 = \mathbb{E}(D) - 1 \leq 0.$$

Q 28.2. Par Q 27.2, f' est strictement croissante sur $[0, 1]$. Avec $f'(0) < 0$ (Q 27.3) et $f'(1) \leq 0$ (Q 28.1), f' reste strictement négative sur $[0, 1[$ (et au plus nulle en 1). Donc f est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

Q 28.3. $f(1) = G_D(1) - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $1 \in F$. Comme f est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et $f(1) = 0$, on a $f(t) > 0$ pour tout $t \in [0, 1[$. Donc 1 est l'unique solution de $f = 0$ dans $[0, 1] : F = \{1\}$ et, par Q 25.6, $\alpha = 1$.

Interprétation. Lorsque l'espérance du nombre de descendants par euglène est ≤ 1 (régime sous-critique ou critique), l'extinction est *certaine* : presque sûrement, la population finit par s'éteindre.

Q 29.1. $f'(1) = \mathbb{E}(D) - 1 > 0$.

Q 29.2. f' est continue (car polynomiale) et strictement croissante sur $[0, 1]$ (Q 27.2). Avec $f'(0) < 0 < f'(1)$, le théorème des valeurs intermédiaires version stricte assure l'existence d'un unique $\beta \in]0, 1[$ tel que $f'(\beta) = 0$.

Q 29.3. $f' < 0$ sur $[0, \beta[$, $f'(\beta) = 0$, $f' > 0$ sur $] \beta, 1]$. Donc f est strictement décroissante sur $[0, \beta]$ et strictement croissante sur $[\beta, 1]$. Le point β est un minimum strict de f sur $[0, 1]$.

On a $f(0) = p_0 \geq 0$ et $f(1) = 0$. Par stricte monotonie de f sur chacun des intervalles, $f(\beta) < f(1) = 0 : f$ atteint en β une valeur strictement négative.

Q 29.4. Sur $[\beta, 1] : f$ est strictement croissante, $f(\beta) < 0$ et $f(1) = 0$. Par théorème des valeurs intermédiaires (version stricte), 1 est l'unique zéro de f sur $[\beta, 1]$.

Sur $[0, \beta] : f$ est strictement décroissante, $f(0) = p_0 \geq 0$ et $f(\beta) < 0$.

— Si $p_0 > 0$: par TVI strict, il existe un unique $\alpha' \in]0, \beta[$ tel que $f(\alpha') = 0$.

— Si $p_0 = 0$: alors $f(0) = 0$, donc $0 \in F$. Sur $]0, \beta]$, $f < f(0) = 0$. L'unique zéro sur $[0, \beta]$ est alors $\alpha' = 0$.

Dans tous les cas, on obtient un unique zéro $\alpha' \in [0, \beta[$. Donc $F = \{\alpha', 1\}$ avec $\alpha' < \beta < 1$. Par Q 25.6, $\alpha = \min F = \alpha' < 1$.

Interprétation. En régime sur-critique ($\mathbb{E}(D) > 1$), la population a une probabilité strictement positive $1 - \alpha > 0$ de *ne jamais s'éteindre*. La probabilité d'extinction $\alpha < 1$ est l'unique racine de $G_D(t) = t$ dans $[0, 1[$.

III.E. Une application : calcul numérique de la probabilité d'extinction

Q 30. On suppose $\mathbb{E}(D) > 1$ (sinon $\alpha = 1$ trivialement). On a montré (Q 29.4) : $f > 0$ sur $[0, \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, $f < 0$ sur $] \alpha, 1[$, $f(1) = 0$.

L'algorithme de dichotomie maintient l'invariant $\alpha \in [a, c]$ et $f(c) \leq 0$:

— Initialement $a = 0$, $c = 1$, $f(c) = f(1) = 0 \leq 0$, et $\alpha \in [0, 1]$.

— À chaque tour, on calcule $b = (a + c)/2$. Si $f(b) > 0$, alors $b < \alpha$, on pose $a = b$. Sinon $f(b) \leq 0$, donc $b \geq \alpha$ (et $b \leq 1$), on pose $c = b$.

On poursuit tant que $c - a > \varepsilon$. À l'arrêt, $c \geq \alpha$ et $c - a \leq \varepsilon$, donc $0 \leq c - \alpha \leq \varepsilon$: c est une approximation de α par excès à ε près.

```

1 def proba_extinction(epsilon):
2     a = 0
3     c = 1
4     while c - a > epsilon:
5         b = (a + c) / 2
6         if G_D(b) - b > 0:
7             a = b
8         else:
9             c = b
10    return c

```

Partie IV — Tracés de graphes

Q 31.1. Posons $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j}$. Les X_j étant indépendantes et de même loi que X , par Q 1.5,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(t^{X_0}) = G_X(t).$$

Par indépendance et Q 1.6, $V(t^{X_j}) = V(t^X) \leq 1$, donc

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} V(t^{X_j}) = \frac{V(t^X)}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|Y_n - G_X(t)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

Q 31.2. Pour chaque $i \in \{0, \dots, p\}$, l'événement A_i^c s'écrit

$$A_i^c = \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (i/p)^{X_j} - G_X(i/p) \right| \geq \varepsilon \right\}.$$

Par Q 31.1 (avec $t = i/p \in [0, 1]$), $P(A_i^c) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$. Donc, par sous-additivité de P ,

$$P\left(\bigcap_{i=0}^p A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=0}^p A_i^c\right) \geq 1 - \sum_{i=0}^p P(A_i^c) \geq 1 - \frac{p+1}{n\varepsilon^2}.$$

Q 31.3. Pour avoir $P(\bigcap_i A_i) \geq 1 - \eta$, il suffit que $\frac{p+1}{n\varepsilon^2} \leq \eta$, c'est-à-dire

$$n \geq \frac{p+1}{\eta\varepsilon^2}.$$

Q 32.1. La ligne calcule un entier n satisfaisant la condition suffisante de Q 31.3 :

$$n = \left\lfloor \frac{p+1}{\eta\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 \geq \frac{p+1}{\eta\varepsilon^2}.$$

Le $+1$ (combiné à la troncature `int(...)` qui agit comme partie entière sur les réels positifs) garantit l'inégalité large nécessaire à l'application de Q 31.3.

Q 32.2. Pour $i \in \{0, \dots, p\}$ fixé, la double boucle calcule

$$y_empir[i] = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x[i]^{echantillon[j]}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{i}{p}\right)^{X_j},$$

où les `echantillon[j]` sont n réalisations indépendantes de X . C'est exactement la moyenne empirique apparaissant dans Q 31.2 : un estimateur de $G_X(i/p)$.

Q 32.3. La ligne 9 calcule, pour chaque i , `ymax[i] = y_empir[i] + ε` : c'est la borne supérieure de l'intervalle de confiance autour de `y_empir[i]`. La ligne 10 calcule la borne inférieure `ymin[i] = y_empir[i] - ε`.

Q 32.4. Longueur des segments. Pour tout i ,

$$\|M_i N_i\| = ymax[i] - ymin[i] = 2\varepsilon.$$

Intersection avec la courbe. Par Q31.2, avec probabilité $\geq 1 - \eta$, l'événement $\bigcap_{i=0}^p A_i$ est réalisé. Sur cet événement, pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$,

$$|y_{\text{empir}}[i] - G_X(i/p)| < \varepsilon \iff y_{\text{min}}[i] < G_X(i/p) < y_{\text{max}}[i].$$

Le point $(x[i], G_X(x[i]))$ appartient donc au segment vertical $[M_i, N_i]$: la courbe $\{(t, G_X(t)) : t \in [0, 1]\}$ intersecte chacun des $p + 1$ segments avec probabilité au moins $1 - \eta$.

Q 33. Si X est à valeurs dans $\{0, \dots, m\}$ et $P(X = n) = p_n$, alors

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^m p_n t^n.$$

La commande calcule $x[i] = i/p$ et $y[i] = G_X(x[i])$ par évaluation directe.

```

1 def trace2(p, liste):
2     x = [i/p for i in range(p+1)]
3     y = [0 for i in range(p+1)]
4     m = len(liste) - 1
5     for i in range(p+1):
6         for n in range(m+1):
7             y[i] = y[i] + liste[n] * x[i]**n
8     plt.plot(x, y, 'o') # 'o' pour tracer les p+1 points
9     plt.show()

```

Pour la commande `trace2(10, [0.4, 0.6])` (qui correspond à $X \sim \mathcal{B}(0,6)$, soit la loi de Bernoulli de paramètre $3/5$), on a $G_X(t) = 0,4 + 0,6t$: on obtient onze points alignés sur la droite d'équation $y = 0,4 + 0,6x$ entre $(0; 0,4)$ et $(1; 1)$.

Cette correction couvre l'intégralité du sujet « Modélisation mathématique et informatique », Banque Agro-Véto BCPST, session 2026. Pour des fiches méthodes complémentaires sur les variables aléatoires, les fonctions génératrices et les processus de branchement, retrouvez les ressources Excellence Maths sur excellence-maths.fr.