

Correction – Épreuve de Mathématiques A

Banque PT – Matrices et probabilités

Partie A – Quelques matrices

On considère

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ est trigonalisable sur le corps K si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur K . En particulier, toute matrice réelle de taille 2 dont le polynôme caractéristique a deux racines réelles, éventuellement confondues, est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pour M_1 , on calcule

$$\chi_{M_1}(X) = \det(XI_2 - M_1) = X^2 - 3X - 4 = (X - 4)(X + 1).$$

Les deux valeurs propres sont réelles et distinctes, donc M_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc aussi dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Pour $\lambda = 4$, on a

$$M_1 - 4I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

ce qui donne un vecteur propre $u_1 = (3, 1)^T$. Pour $\lambda = -1$, un vecteur propre est $u_2 = (-2, 1)^T$. Ainsi

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$\boxed{M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}}.$$

3. Pour M_2 , on obtient

$$\chi_{M_2}(X) = X^2 - 4X + 5 = (X - 2)^2 + 1 = (X - (2 + i))(X - (2 - i)).$$

Les valeurs propres ne sont pas réelles : M_2 n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En revanche, elles sont distinctes dans \mathbb{C} , donc M_2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Un vecteur propre associé à $2 + i$ est $(1 + i, 1)^T$, et un vecteur propre associé à $2 - i$ est $(1 - i, 1)^T$. On peut donc prendre

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 + i & 1 - i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 2 + i & 0 \\ 0 & 2 - i \end{pmatrix},$$

et

$$\boxed{M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}}.$$

4. Pour M_3 ,

$$\chi_{M_3}(X) = X^2 - 6X + 9 = (X - 3)^2.$$

La seule valeur propre est 3. Or

$$M_3 - 3I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

donc l'espace propre est de dimension 1, engendré par $(2, 1)^T$. Ainsi M_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En revanche, son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} , donc M_3 est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Cherchons une base (e_1, e_2) telle que la matrice de f_3 soit

$$T_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il faut avoir

$$f_3(e_1) = 3e_1, \quad f_3(e_2) = e_1 + 3e_2.$$

On prend $e_1 = (2, 1)^T$. Il suffit ensuite de résoudre

$$(M_3 - 3I_2)e_2 = e_1.$$

Avec $e_2 = (1, 0)^T$, on a bien

$$(M_3 - 3I_2)e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1.$$

Donc une base convenable est

$$\left[\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right].$$

On considère désormais

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

5. On a

$$\det M(a, b) = a - b.$$

Ainsi

$$M(a, b) \text{ est inversible} \iff a \neq b.$$

6. Le polynôme caractéristique est

$$\chi_{M(a,b)}(X) = X^2 - (a+1)X + (a-b).$$

Son discriminant vaut

$$\Delta(a, b) = (a+1)^2 - 4(a-b) = a^2 - 2a + 1 + 4b.$$

Donc

$$\Delta(a, b) = (a-1)^2 + 4b.$$

7. Si $\Delta(a, b) = 0$, alors $M(a, b)$ possède une unique valeur propre

$$\lambda = \frac{a+1}{2}.$$

Une matrice 2×2 diagonalisable avec une seule valeur propre est nécessairement égale à λI_2 . Or $M(a, b)$ ne peut jamais être scalaire puisque son coefficient en position $(2, 1)$ vaut 1. Donc

$$\Delta(a, b) = 0 \implies M(a, b) \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Si $\Delta(a, b) \neq 0$, les deux valeurs propres complexes sont distinctes. Donc $M(a, b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Plus précisément :

$$\begin{array}{l} \Delta(a, b) > 0 \implies M(a, b) \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \\ \Delta(a, b) < 0 \implies M(a, b) \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ mais pas dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \end{array}$$

8. La condition $\Delta(a, b) = 0$ correspond à la parabole

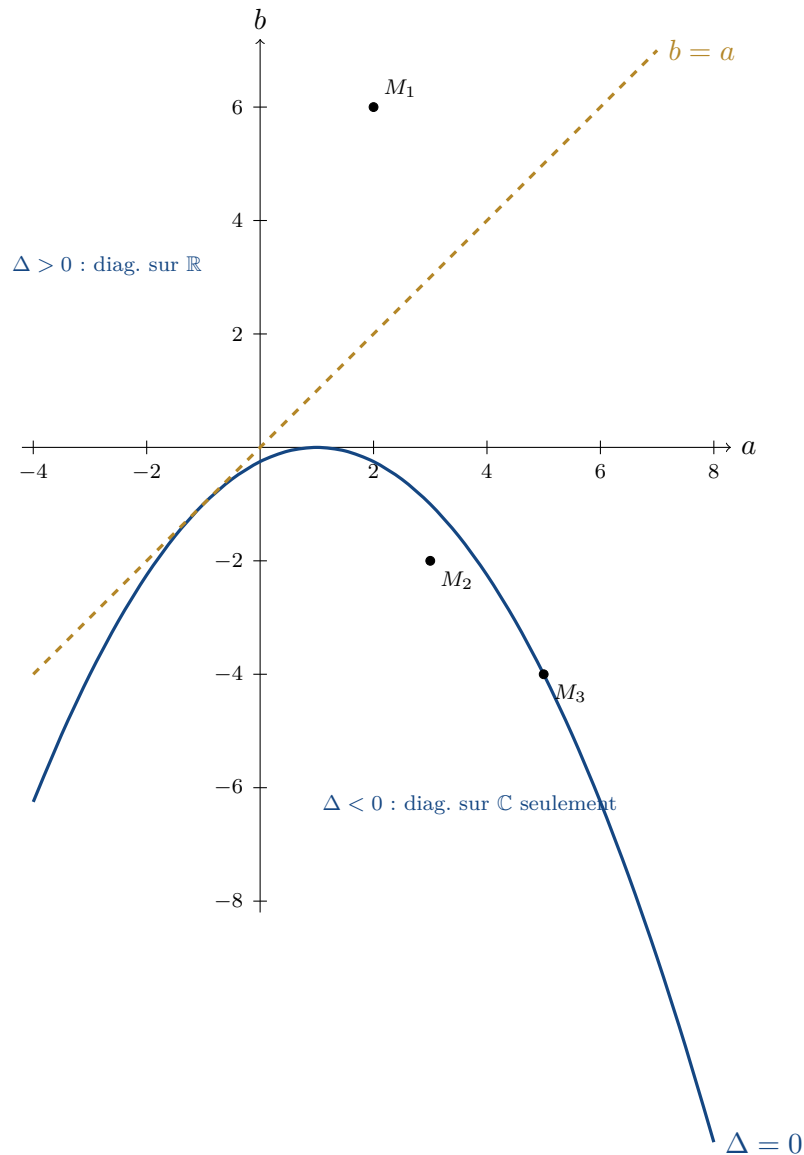
$$b = -\frac{(a-1)^2}{4}.$$

La droite des matrices non inversibles est

$$b = a.$$

Les points correspondant à M_1, M_2, M_3 sont respectivement

$$M_1 : (2, 6), \quad M_2 : (3, -2), \quad M_3 : (5, -4).$$



On lit donc : au-dessus de la parabole, les matrices sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; en dessous, elles sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; sur la parabole, elles ne sont pas diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. La droite $b = a$ donne les matrices non inversibles.

Partie B – Un couple de variables aléatoires

On pose

$$C = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La somme des coefficients entiers de la matrice vaut 12, donc C définit bien une loi conjointe.

1. Pour tout i , on a

$$(CU)_i = \sum_{j=1}^3 c_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i).$$

Ainsi CU donne la loi marginale de X . On calcule

$$CU = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{5}{12}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

Par formule de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X) = (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{5}{12} + 1 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}.$$

Or $V^T CU$ est exactement cette somme pondérée, donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = V^T CU = -\frac{1}{12}.}$$

2. De même, la loi marginale de Y est donnée par $C^T U$, car

$$(C^T U)_j = \sum_{i=1}^3 c_{ij} = \mathbb{P}(Y = x_j).$$

On obtient

$$C^T U = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi Y suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$, et

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = V^T C^T U = 0.}$$

3. On a

$$V^T CV = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = x_j).$$

Ce produit matriciel représente donc $\mathbb{E}(XY)$. Calculons :

$$CV = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$V^T C V = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = -\frac{1}{12}.$$

4. La covariance vaut

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Comme $\mathbb{E}(Y) = 0$, on obtient

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{12}.$$

5. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Première justification : si X et Y étaient indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Or $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{12} \neq 0$.

Deuxième justification :

$$\mathbb{P}(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{12},$$

tandis que

$$\mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Ces deux nombres sont différents, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

6. On a

$$\text{tr}(C) = c_{11} + c_{22} + c_{33}.$$

Or les coefficients diagonaux correspondent aux événements $(X, Y) = (-1, -1), (0, 0), (1, 1)$.

Donc

$$\text{tr}(C) = \mathbb{P}(X = Y).$$

On calcule

$$\text{tr}(C) = \frac{1}{12}(1 + 2 + 1) = \frac{1}{3}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{3}.$$

Partie C – Des variables aléatoires dans une matrice

On considère

$$M(A, B) = \begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la partie A,

$$M(A, B) \text{ est inversible } \iff A \neq B,$$

et

$$M(A, B) \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \iff (A - 1)^2 + 4B = 0.$$

1. Dans cette question, $A = X$ et $B = Y$, avec (X, Y) défini dans la partie B.

(a) On a

$$\mathbb{P}(M(A, B) \text{ inversible}) = \mathbb{P}(A \neq B) = 1 - \mathbb{P}(A = B).$$

D'après la partie B, $\mathbb{P}(A = B) = \text{tr}(C) = \frac{1}{3}$. Donc

$$\mathbb{P}(M(A, B) \text{ inversible}) = \frac{2}{3}.$$

(b) La matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ lorsque

$$(A - 1)^2 + 4B = 0.$$

Comme $A, B \in \{-1, 0, 1\}$, les seuls couples possibles sont

$$(A, B) = (-1, -1) \quad \text{et} \quad (A, B) = (1, 0).$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(M(A, B) \text{ non diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{C})) = c_{11} + c_{32} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Puisqu'une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est aussi diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on obtient également

$$\mathbb{P}(M(A, B) \text{ n'est diagonalisable ni dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ ni dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{C})) = \frac{1}{6}.$$

À partir de maintenant, A et B sont supposées indépendantes.

2. Supposons que A et B soient à valeurs dans une même partie $H \subset \mathbb{N}$. Alors

$$\{A = B\} = \bigcup_{k \in H} (\{A = k\} \cap \{B = k\}),$$

et cette réunion est disjointe. Donc, par indépendance,

$$\mathbb{P}(A = B) = \sum_{k \in H} \mathbb{P}(A = k, B = k) = \sum_{k \in H} \mathbb{P}(A = k)\mathbb{P}(B = k).$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(A = B) = \sum_{k \in H} \mathbb{P}(A = k)\mathbb{P}(B = k).$$

3. On suppose que $A \sim \mathcal{B}(n, p)$ et que B suit la loi géométrique de paramètre r sur \mathbb{N}^* .

(a) L'univers-image de A est

$$A(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\},$$

et, pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(A = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(b) L'univers-image de B est

$$B(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

Pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(B = k) = r(1-r)^{k-1}.$$

- (c) La matrice $M(A, B)$ est non inversible si et seulement si $A = B$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(A = B) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} r (1-r)^{k-1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A = B) &= \frac{r}{1-r} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (p(1-r))^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{r}{1-r} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p(1-r))^k (1-p)^{n-k} - (1-p)^n \right] \\ &= \frac{r}{1-r} [(1-p + p(1-r))^n - (1-p)^n] \\ &= \frac{r}{1-r} [(1-pr)^n - (1-p)^n]. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(M(A, B) \text{ non inversible}) = \frac{r}{1-r} [(1-pr)^n - (1-p)^n].$$

4. On suppose que $A \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et que $C = -B \sim \mathcal{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu > 0$.

- (a) L'univers-image de A est \mathbb{N} et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(A = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

- (b) Les fonctions génératrices de A et C sont

$$G_A(t) = e^{\lambda(t-1)}, \quad G_C(t) = e^{\mu(t-1)}.$$

Comme A et C sont indépendantes,

$$G_{A+C}(t) = G_A(t)G_C(t) = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

C'est la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Donc

$$A + C \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

- (c) Comme $C = -B$, on a

$$A = B \iff A = -C \iff A + C = 0.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(M(A, B) \text{ inversible}) = 1 - \mathbb{P}(A = B) = 1 - \mathbb{P}(A + C = 0).$$

Or $A + C \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$, donc

$$\mathbb{P}(A + C = 0) = e^{-(\lambda+\mu)}.$$

Finalement

$$\mathbb{P}(M(A, B) \text{ inversible}) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)}.$$

5. On suppose désormais que $A \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $B \sim \mathcal{P}(\mu)$, indépendantes. La matrice $M(A, B)$ est non inversible si et seulement si $A = B$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M(A, B) \text{ non inversible}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2} e^{-(\lambda+\mu)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2} e^{-(\lambda+\mu)}.$$

6. Pour tout $n \geq 0$, on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2} e^{-(\lambda+\mu)}.$$

(a) Pour $k \geq n+1$, on a $k! \geq (n+1)!$, donc

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |R_n| &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2} \\ &\leq e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!} \\ &\leq e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!} \\ &= \frac{e^{\lambda\mu - (\lambda+\mu)}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \geq 0, \quad |R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} e^{\lambda\mu - (\lambda+\mu)}.$$

(b) Une fonction Python possible est :

```
from math import exp, factorial

def val_app(eps):
    n = 0
    s = exp(-(la + mu))
    majorant = exp(la*mu - (la + mu)) / factorial(n + 1)
    while majorant > eps:
        n = n + 1
        s = s + ((la*mu)**n) * exp(-(la + mu)) / (factorial(n)**2)
        majorant = exp(la*mu - (la + mu)) / factorial(n + 1)
    return s
```

(c) Pour afficher une valeur approchée de I à 10^{-5} près, on ajoute par exemple :

```
print(val_app(1e-5))
```

7. On simule N fois les variables A et B . Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, $J_i = 1$ si la matrice est non inversible lors de la i -ème simulation, et $J_i = 0$ sinon.

(a) La variable J_i suit une loi de Bernoulli de paramètre I , puisque I est la probabilité que $M(A, B)$ soit non inversible. Donc

$$J_i \sim \mathcal{B}(I).$$

- (b) Les simulations étant indépendantes, les variables J_1, \dots, J_N sont indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre I . Par conséquent

$$K_N = \sum_{i=1}^N J_i$$

suit une loi binomiale de paramètres N et I :

$$\boxed{K_N \sim \mathcal{B}(N, I).}$$

- (c) Comme $\bar{K}_N = \frac{1}{N}K_N$, on a

$$\mathbb{E}(\bar{K}_N) = \frac{1}{N}\mathbb{E}(K_N) = I,$$

et

$$\mathbb{V}(\bar{K}_N) = \frac{1}{N^2}\mathbb{V}(K_N) = \frac{I(1-I)}{N}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(\bar{K}_N) = I, \quad \mathbb{V}(\bar{K}_N) = \frac{I(1-I)}{N}.}$$

- (d) Comme $0 \leq I \leq 1$, on a $I(1-I) \leq \frac{1}{4}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|\bar{K}_N - I| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\bar{K}_N)}{\varepsilon^2} = \frac{I(1-I)}{N\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

Ainsi

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|\bar{K}_N - I| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}.}$$

- (e) L'événement $I \in [\bar{K}_N - \varepsilon, \bar{K}_N + \varepsilon]$ est exactement l'événement $|\bar{K}_N - I| \leq \varepsilon$. Donc

$$\mathbb{P}\left(I \in [\bar{K}_N - \varepsilon, \bar{K}_N + \varepsilon]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(|\bar{K}_N - I| > \varepsilon\right).$$

On en déduit, en utilisant l'inégalité précédente, que

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(I \in [\bar{K}_N - \varepsilon, \bar{K}_N + \varepsilon]\right) \geq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}.}$$

- (f) Pour $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $N = 100000$ et 21357 matrices non inversibles, on observe

$$\bar{K}_N = \frac{21357}{100000} = 0.21357.$$

Pour $\varepsilon = 10^{-2}$, on obtient

$$1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{4 \times 100000 \times 10^{-4}} = 1 - \frac{1}{40} = 0.975.$$

Ainsi, avec une probabilité au moins égale à 0.975,

$$\boxed{I \in [0.20357, 0.22357].}$$

Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, on obtient

$$1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{4 \times 100000 \times 10^{-6}} = 1 - 2.5 = -1.5.$$

La borne est négative : l'inégalité ne donne donc aucune information exploitable dans ce cas. L'intervalle observé serait $[0.21257, 0.21457]$, mais la majoration précédente ne permet pas de lui associer une confiance non triviale.

Partie D – Un deuxième couple de variables aléatoires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires telles que

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}.$$

On note

$$Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad q_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

1. On suppose que X et Y sont indépendantes et que $\mathbb{P}(X = x_i) \neq 0$ pour tout i .

Posons

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i), \quad r_j = \mathbb{P}(Y = y_j).$$

Par indépendance,

$$q_{ij} = p_i r_j.$$

Ainsi

$$Q = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix} = pr^T.$$

Comme $p \neq 0$ et $r \neq 0$, on a

$$\boxed{\text{rg}(Q) = 1.}$$

- (b) Pour une matrice de rang 1, le noyau est de dimension $n - 1$, donc 0 est valeur propre avec multiplicité géométrique $n - 1$. De plus

$$Qp = pr^T p = (r^T p)p.$$

Donc p est vecteur propre associé à

$$\tau = r^T p = \sum_{i=1}^n p_i r_i = \text{tr}(Q).$$

Comme les p_i et les r_i sont strictement positifs, $\tau > 0$. Les valeurs propres réelles de Q sont donc

$$\boxed{0 \text{ avec multiplicité } n - 1, \quad \tau = \text{tr}(Q) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_i) \text{ avec multiplicité } 1.}$$

- (c) La matrice Q est diagonalisable : le sous-espace propre associé à 0 est $\ker(Q) = \{z \in \mathbb{R}^n : r^T z = 0\}$, de dimension $n - 1$, et p fournit un vecteur propre associé à la valeur propre non nulle τ . On dispose donc de n vecteurs propres linéairement indépendants.

- (d) Si on enlève l'hypothèse $\mathbb{P}(X = x_i) \neq 0$, on peut prendre, pour $n = 4$, la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice définit une loi conjointe : la somme de ses coefficients vaut 1. Les variables sont non constantes puisque X prend deux valeurs possibles et Y prend deux valeurs possibles.

On a $Q \neq 0$, mais

$$Q^2 = 0.$$

Donc Q est nilpotente non nulle. Elle ne peut pas être diagonalisable : si elle l'était, toutes ses valeurs propres étant nulles, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait elle-même nulle, contradiction.

2. On suppose maintenant que $\text{rg}(Q) = 1$. Montrons que X et Y sont indépendantes.

Comme Q est de rang 1, tous ses mineurs d'ordre 2 sont nuls. Ainsi, pour tous i, j, k, l ,

$$q_{ij}q_{kl} = q_{il}q_{kj}.$$

En sommant cette égalité sur k et l , et en utilisant $\sum_{k,l} q_{kl} = 1$, on obtient

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{ij}q_{kl} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{il}q_{kj}.$$

Or

$$\sum_{l=1}^n q_{il} = \mathbb{P}(X = x_i), \quad \sum_{k=1}^n q_{kj} = \mathbb{P}(Y = y_j).$$

Donc

$$q_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j).$$

Autrement dit,

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$$

pour tous i, j . Les variables X et Y sont donc indépendantes.

$\text{rg}(Q) = 1 \implies X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}$
