

Épreuve de Mathématiques C

Correction détaillée

Le sujet articule trois parties autour de la fonction $t \mapsto \frac{t}{t_0-t}$: étude locale et développements limités (préambule), analyse fine de la série $\sum \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n})$ (Partie I), intégrale dépendant d'un paramètre $G_n(x) = \int_0^{+\infty} x^{-nt} t^n dt$ (Partie II), et exploitation du calcul différentiel à deux variables pour estimer une somme partielle (Partie III).

Préambule

Dans toute cette section, t_0 désigne un réel strictement positif fixé.

Question 1 — Domaines de dérivabilité et expression des dérivées

Les fonctions f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ comme quotients de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

On observe l'identité :

$$f(t) = \frac{t}{t_0-t} = \frac{-(t_0-t) + t_0}{t_0-t} = -1 + \frac{t_0}{t_0-t} = g(t) - 1.$$

Par conséquent f et g diffèrent d'une constante, donc $f' = g'$ sur leur domaine commun. On dérive g :

$$g'(t) = t_0 \cdot \frac{-(-1)}{(t_0-t)^2} = \frac{t_0}{(t_0-t)^2}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$: $f'(t) = g'(t) = \frac{t_0}{(t_0-t)^2}$.

Question 2 — Tableau de variations de f

Comme $t_0 > 0$, $f'(t) = \frac{t_0}{(t_0-t)^2} > 0$ sur chaque intervalle.

Limites aux bornes. En factorisant t :

$$f(t) = \frac{1}{\frac{t_0}{t} - 1} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{0-1} = -1.$$

Au voisinage de t_0 : $t \rightarrow t_0 > 0$, donc

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0^-} +\infty \quad \text{et} \quad f(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0^+} -\infty.$$

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
$f'(t)$	+		+
$f(t)$	-1 ↗	$\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$	↘ -1

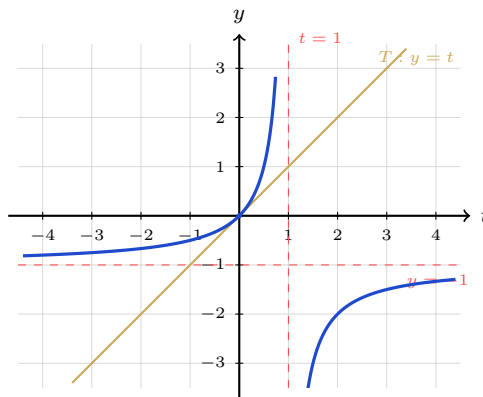
Question 3 — Tangente T en 0

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = \frac{t_0}{t_0^2} = \frac{1}{t_0}.$$

$$T : y = \frac{t}{t_0}.$$

Question 4 — Tracé pour $t_0 = 1$

Pour $t_0 = 1$: $f(t) = \frac{t}{1-t}$ et $T : y = t$. Asymptote verticale $t = 1$, asymptote horizontale $y = -1$ en $\pm\infty$, tangente de pente 1 en 0.



Question 5 — Dérivée n -ième de f

Comme $f = g - 1$, on a $f^{(n)} = g^{(n)}$ pour tout $n \geq 1$.

Récurrence. Soit $\mathcal{P}(n)$: « g est n fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ et $g^{(n)}(t) = \frac{n! t_0}{(t_0 - t)^{n+1}}$ ».

Initialisation ($n = 1$) : déjà obtenu, $g'(t) = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2} = \frac{1! t_0}{(t_0 - t)^2}$.

Hérédité. Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $t \mapsto (t_0 - t)^{-(n+1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$, et

$$g^{(n+1)}(t) = n! t_0 \cdot [-(n+1)(t_0 - t)^{-(n+2)} \cdot (-1)] = \frac{(n+1)! t_0}{(t_0 - t)^{n+2}}.$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$: $f^{(n)}(t) = \frac{n! t_0}{(t_0 - t)^{n+1}}$.

Question 6 — Primitives de g puis de f

Sur chaque intervalle $]-\infty, t_0[$ et $]t_0, +\infty[$, $t \mapsto t_0 - t$ ne s'annule pas. On reconnaît une dérivée logarithmique :

$$G(t) = -t_0 \ln |t_0 - t| \text{ vérifie } G'(t) = -t_0 \cdot \frac{-1}{t_0 - t} = \frac{t_0}{t_0 - t} = g(t).$$

Comme $f = g - 1$:

$$F(t) = G(t) - t = -t_0 \ln |t_0 - t| - t.$$

Question 7 — Formule de Taylor-Young

Hypothèses. $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalle de \mathbb{R} , $x_0 \in I$. On suppose ψ de classe \mathcal{C}^{n-1} sur un voisinage de x_0 dans I , et $\psi^{(n-1)}$ dérivable en x_0 (autrement dit : ψ est n fois dérivable en x_0).

Formule. Sous ces hypothèses, lorsque $x \rightarrow x_0$:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\psi^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Question 8 — DL de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ à l'ordre n en 0

Domaine. $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc sur un voisinage de 0, et elle y est de classe \mathcal{C}^∞ .

Calcul. La fonction φ correspond à g avec $t_0 = 1$. La Question 5 donne :

$$\varphi^{(k)}(t) = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}}, \quad \varphi^{(k)}(0) = k!.$$

Par Taylor-Young :

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!}{k!} t^k + o(t^n).$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^n + o(t^n).$$

Question 9 — DL de $t \mapsto \ln(1-t)$ à l'ordre n en 0

Domaine. $\theta : t \mapsto \ln(1-t)$ est définie sur $] -\infty, 1[$, donc sur un voisinage de 0, et elle y est de classe \mathcal{C}^∞ .

Calcul par primitivation. On a $\theta'(t) = -\frac{1}{1-t}$. La Question 8 à l'ordre $n-1$ donne :

$$\theta'(t) = -1 - t - t^2 - \dots - t^{n-1} + o(t^{n-1}).$$

Comme $\theta(0) = 0$, on intègre terme à terme (la formule de Taylor-Young permet la primitivation des DL d'une fonction \mathcal{C}^∞) :

$$\theta(t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \dots - \frac{t^n}{n} + o(t^n).$$

$$\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k} + o(t^n).$$

Partie I

Question 1 — Primitive de h sur \mathbb{R}_+^*

Décomposition en éléments simples : pour $t > 0$,

$$\frac{1}{t+t^2} = \frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}.$$

Une primitive immédiate sur \mathbb{R}_+^* :

$$H(t) = \ln(t) - \ln(1+t) = \ln\left(\frac{t}{1+t}\right).$$

Question 2 — Convergence et calcul de $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2}$

Convergence. Sur $[n, +\infty[$ avec $n \geq 2$, h est continue positive. Au voisinage de $+\infty$, $h(t) \sim 1/t^2$, intégrable (Riemann $\alpha = 2 > 1$). L'intégrale converge.

Calcul. Pour $X > n$,

$$\int_n^X \frac{dt}{t+t^2} = \left[\ln \frac{t}{1+t} \right]_n^X = \ln \frac{X}{X+1} - \ln \frac{n}{n+1} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} -\ln \frac{n}{n+1}.$$

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2} = \ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Question 3 — Forme close de u_n

On calcule la première intégrale par changement de variable. Posons $u = n + \cos(nt)$, $du = -n \sin(nt) dt$, soit $\sin(nt) dt = -du/n$.

Bornes : $t = 0 \Rightarrow u = n + 1$; $t = \pi \Rightarrow u = n + \cos(n\pi) = n + (-1)^n$. Comme $n \geq 2$, $n + \cos(nt) \geq n - 1 \geq 1 > 0$ sur $[0, \pi]$, donc le dénominateur reste strictement positif.

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n + \cos(nt)} dt = -\frac{1}{n} \int_{n+1}^{n+(-1)^n} \frac{du}{u} = -\frac{1}{n} \ln \frac{n + (-1)^n}{n + 1}.$$

Donc :

$$-n \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n + \cos(nt)} dt = \ln \frac{n + (-1)^n}{n + 1}.$$

Avec la Question 2 :

$$u_n = \ln \frac{n + (-1)^n}{n + 1} + \ln \frac{n + 1}{n} = \ln \frac{n + (-1)^n}{n} = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Pour tout $n \geq 2$: $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Question 4 — Limite de (u_n)

$\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ et \ln continue en 1, donc $u_n \rightarrow \ln 1 = 0$.

Question 5 — Linéarité de la convergence des séries

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes, de sommes partielles $A_N = \sum_{k=0}^N a_k \rightarrow A$ et $B_N = \sum_{k=0}^N b_k \rightarrow B$.

La somme partielle de $\sum (a_n + \lambda b_n)$ est $A_N + \lambda B_N$, qui tend vers $A + \lambda B$ par linéarité de la limite. Donc $\sum (a_n + \lambda b_n)$ converge, de somme $A + \lambda B$.

Question 6 — Convergence de $\sum u_n$ et convergence absolue

Développement asymptotique. Avec le DL de la Question 9 (où t joue le rôle de $-(-1)^n/n$), pour $n \rightarrow +\infty$:

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Convergence de $\sum u_n$. On écrit $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $b_n = u_n - a_n$.

- $\sum a_n$ converge (critère spécial des séries alternées : $1/n$ décroît vers 0).
- $b_n = -\frac{1}{2n^2} + O(1/n^3)$, donc $|b_n| = O(1/n^2)$: $\sum b_n$ converge absolument.

Par la Question 5, $\sum u_n$ converge.

Non-convergence absolue. L'équivalent $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$ donne $|u_n| \sim \frac{1}{n}$. Comme $\sum 1/n$ diverge, $\sum |u_n|$ diverge par équivalence (séries à termes positifs).

La série $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument.

Question 7

(a) **Calcul de S_{2N} .** Pour $p \geq 1$, regroupons les termes pairs et impairs consécutifs :

$$u_{2p} + u_{2p+1} = \ln \frac{2p+1}{2p} + \ln \frac{2p}{2p+1} = \ln 1 = 0.$$

Pour $N \geq 1$, on découpe S_{2N} en regroupant $(u_2, u_3), (u_4, u_5), \dots, (u_{2N-2}, u_{2N-1})$ et le terme isolé u_{2N} :

$$S_{2N} = \sum_{p=1}^{N-1} (u_{2p} + u_{2p+1}) + u_{2N} = 0 + u_{2N} = \ln\left(1 + \frac{1}{2N}\right) = \ln \frac{2N+1}{2N}.$$

$\forall N \geq 1, \quad S_{2N} = \ln \frac{2N+1}{2N}.$

(b) **Expressions de u_{2n+1} et u_{2n} .** Pour tout $n \geq 1$:

$$u_{2n} = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \ln \frac{2n+1}{2n}, \quad u_{2n+1} = \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \ln \frac{2n}{2n+1}.$$

(c) **Calcul de S_{2N-1} pour $N \geq 2$.**

$$S_{2N-1} = S_{2N} - u_{2N} = \ln \frac{2N+1}{2N} - \ln \frac{2N+1}{2N} = 0.$$

$\forall N \geq 2, \quad S_{2N-1} = 0.$

(d) **Calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.** Les deux suites extraites $(S_{2N})_{N \geq 1}$ et $(S_{2N-1})_{N \geq 2}$ ont la même limite :

$$S_{2N} = \ln \frac{2N+1}{2N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln 1 = 0, \quad S_{2N-1} = 0 \rightarrow 0.$$

Comme la suite (S_N) converge ssi ses extraites paires et impaires convergent vers la même limite (et la convergence est déjà acquise par la Question 6) :

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 0.}$$

Partie II

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > 1$, on pose :

$$G_n(x) = \int_0^{+\infty} x^{-nt} t^n dt.$$

Question 1 — Convergence de $G_n(x)$

Soit $x > 1$ et $n \geq 1$ fixés. La fonction $\Phi : t \mapsto t^n x^{-nt} = t^n e^{-nt \ln x}$ est continue positive sur $[0, +\infty[$, sans singularité en 0.

Pour $t \rightarrow +\infty$, $\ln x > 0$ donc $n \ln x > 0$: la décroissance exponentielle l'emporte sur la croissance polynomiale, et

$$t^2 \Phi(t) = t^{n+2} e^{-nt \ln x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $\Phi(t) = o(1/t^2)$ en $+\infty$, intégrable. L'intégrale $G_n(x)$ converge.

Question 2 — Continuité de $x \mapsto G_n(x)$ sur $[a, +\infty[$

Soit $a > 1$. On applique le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Posons $\Phi(x, t) = t^n x^{-nt}$ pour $(x, t) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[$.

- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ (Question 1).
- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $x \mapsto \Phi(x, t)$ est continue sur $[a, +\infty[$.
- **Domination.** Pour $x \geq a > 1$ et $t \geq 0$: $x^{-nt} \leq a^{-nt}$, donc

$$|\Phi(x, t)| \leq t^n a^{-nt} =: \varphi(t),$$

avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$ par la Question 1 (avec a à la place de x).

Donc G_n est continue sur $[a, +\infty[$. Ceci étant valable pour tout $a > 1$, G_n est continue sur $]1, +\infty[$.

Question 3 — Dérivabilité et expression de $G'_n(x)$

Soit $a > 1$. On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale. La fonction $\Phi(x, t)$ admet une dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = t^n \cdot (-nt) x^{-nt-1} = -\frac{n}{x} t^{n+1} x^{-nt}.$$

- Pour tout $x > 1$, $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[a, +\infty[$.
- **Domination.** Pour $x \geq a > 1$: $x^{-nt-1} \leq a^{-nt-1}$ et $\frac{n}{x} \leq \frac{n}{a}$, donc

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{n}{a} t^{n+1} a^{-nt-1} = \frac{n}{a^2} t^{n+1} a^{-nt},$$

intégrable sur $[0, +\infty[$ (même argument exponentiel qu'à la Question 1).

G_n est donc dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, donc sur $]1, +\infty[$, et :

$$\forall x > 1, \quad G'_n(x) = -\frac{n}{x} \int_0^{+\infty} t^{n+1} x^{-nt} dt.$$

Question 4 — Relation de récurrence sur G_n

On suit l'indication. Pour $n \geq 1$, on effectue dans $G_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} x^{-(n+1)t} t^{n+1} dt$ le changement de variable $u = \frac{(n+1)t}{n}$, soit $t = \frac{nu}{n+1}$ et $dt = \frac{n}{n+1} du$; les bornes deviennent 0 et $+\infty$.

$$-(n+1)t = -(n+1) \cdot \frac{nu}{n+1} = -nu, \quad t^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} u^{n+1}.$$

Donc :

$$G_{n+1}(x) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \int_0^{+\infty} u^{n+1} x^{-nu} du.$$

Calcul de $\int_0^{+\infty} u^{n+1} x^{-nu} du$ par IPP. On pose $p = u^{n+1}$ et $q' = x^{-nu} = e^{-nu \ln x}$; alors $p' = (n+1)u^n$ et une primitive de q' est $q = -\frac{x^{-nu}}{n \ln x}$. Les fonctions p et q sont \mathcal{C}^1 ; le crochet vaut 0 aux deux bornes (en 0 par u^{n+1} , en $+\infty$ par décroissance exponentielle). Donc :

$$\int_0^{+\infty} u^{n+1} x^{-nu} du = \frac{n+1}{n \ln x} \int_0^{+\infty} u^n x^{-nu} du = \frac{n+1}{n \ln x} G_n(x).$$

En reportant :

$$G_{n+1}(x) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n \ln x} G_n(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} G_n(x).$$

$$\forall n \geq 1, \forall x > 1, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} G_n(x).$$

Question 5 — Calcul de $G_1(x)$

Pour $x > 1$, posons $\alpha = \ln x > 0$:

$$G_1(x) = \int_0^{+\infty} t e^{-\alpha t} dt.$$

Le changement de variable $v = \alpha t$ donne $dt = dv/\alpha$ et $t = v/\alpha$:

$$G_1(x) = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{+\infty} v e^{-v} dv = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \Gamma(2) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

$$G_1(x) = \frac{1}{(\ln x)^2}.$$

Question 6 — Forme explicite de $G_n(x)$

Itération de la récurrence. En appliquant la Question 4 successivement de G_1 à G_n :

$$G_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{\ln x} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k+1} \right] \cdot G_1(x) = \frac{1}{(\ln x)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k+1} \cdot \frac{1}{(\ln x)^2}.$$

Donc :

$$G_n(x) = \frac{1}{(\ln x)^{n+1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k+1}.$$

Simplification du produit. Notons $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}$. Au numérateur, le facteur j^{j+1} apparaît pour $k = j$ ($1 \leq j \leq n-1$). Au dénominateur, le facteur j^j apparaît pour $k = j-1$ ($2 \leq j \leq n$).

Donc, pour chaque base $j \in \{2, \dots, n-1\}$, l'exposant net est $(j+1) - j = 1$: il reste j^1 . Pour $j = 1$: seulement au numérateur, $1^2 = 1$. Pour $j = n$: seulement au dénominateur, n^n .

$$P_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{n^n} = \frac{(n-1)!}{n^n}.$$

$$\forall n \geq 1, \forall x > 1, \quad G_n(x) = \frac{(n-1)!}{n^n (\ln x)^{n+1}} = \frac{n!}{n^{n+1} (\ln x)^{n+1}}.$$

Vérification. Pour $n = 1$: $G_1(x) = \frac{0!}{1 \cdot (\ln x)^2} = \frac{1}{(\ln x)^2}$. ✓

Question 7 — Convergence et somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n G_n(x)}{(n-1)!}$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x > 1$. Notons $T_n = \frac{a^n G_n(x)}{(n-1)!}$. Avec la Question 6 :

$$T_n = \frac{a^n}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^n (\ln x)^{n+1}} = \frac{a^n}{n^n (\ln x)^{n+1}} = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{a}{n \ln x} \right)^n.$$

Condition de convergence. On applique la règle de d'Alembert sur $|T_n|$:

$$\frac{|T_{n+1}|}{|T_n|} = \frac{|a|}{\ln x} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{|a|}{(n+1) \ln x} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \cdot \frac{1}{e} = 0 < 1.$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n G_n(x)}{(n-1)!}$ converge absolument pour tout $a \in \mathbb{R}$ (la condition $x > 1$ étant l'unique contrainte requise par l'énoncé).

Calcul de la somme. On revient à la définition intégrale et on applique le théorème d'inversion somme-intégrale (Fubini) ; la convergence absolue justifie l'échange. Avec $\Psi(t) = atx^{-t}$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^n x^{-nt} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(atx^{-t})^n}{(n-1)!} dt.$$

Or, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{y^n}{(n-1)!} = y \sum_{n \geq 1} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} = ye^y$. Avec $y = \Psi(t) = atx^{-t}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(atx^{-t})^n}{(n-1)!} = atx^{-t} \exp(atx^{-t}).$$

$$S(x) = \int_0^{+\infty} atx^{-t} \exp(atx^{-t}) dt.$$

Justification rapide de Fubini. Pour $a \geq 0$, tous les termes sont positifs : Tonelli s'applique. Pour $a < 0$, on majore $|T_n|$ et on a vu $\sum |T_n| < +\infty$, donc la série double est absolument sommable et Fubini s'applique.

Question 8 — Limite de $G_n(H_N)$ quand $N \rightarrow +\infty$

Par la Question I.7 (a), $S_{2N} = \ln \frac{2N+1}{2N}$; or $S_{2N} = \sum_{k=2}^{2N} \ln(1 + \frac{(-1)^k}{k}) = \ln \left[\prod_{k=2}^{2N} (1 + \frac{(-1)^k}{k}) \right]$.
Donc :

$$\prod_{k=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right) = \frac{2N+1}{2N}, \quad H_N = e \cdot \frac{2N+1}{2N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e.$$

Pour tout $N \geq 2$, $H_N > e > 1$, donc $H_N \in [e, +\infty[\subset]1, +\infty[$.

Par continuité de G_n sur $]1, +\infty[$ (Question 2) :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} G_n(H_N) = G_n(e) = \frac{(n-1)!}{n^n \cdot 1^{n+1}} = \frac{(n-1)!}{n^n}.$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} G_n(H_N) = \frac{(n-1)!}{n^n} = \frac{n!}{n^{n+1}}.$$

Partie III

Pour tout couple (x, y) de réels distincts, on pose $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - \ln|x - y|$. Le domaine est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$, et φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur D .

Question 1 — Matrice hessienne de φ

Dérivées partielles d'ordre 1. Que $x - y$ soit positif ou négatif, $\frac{\partial}{\partial x} \ln|x - y| = \frac{1}{x - y}$ et

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln|x - y| = -\frac{1}{x - y}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x - \frac{1}{x - y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y + \frac{1}{x - y}.$$

Dérivées partielles d'ordre 2.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x-y} \right] = 2 + \frac{1}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{x-y} \right] = 2 + \frac{1}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{x-y} \right] = -\frac{1}{(x-y)^2}.$$

$$H_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{(x-y)^2} & -\frac{1}{(x-y)^2} \\ -\frac{1}{(x-y)^2} & 2 + \frac{1}{(x-y)^2} \end{pmatrix}.$$

Question 2 — Caractérisation des points critiques

$(x_0, y_0) \in D$ est point critique de φ ssi $\nabla \varphi(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} 2x_0 - \frac{1}{x_0 - y_0} = 0 & \text{(i)} \\ 2y_0 + \frac{1}{x_0 - y_0} = 0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

En sommant (i)+(ii) : $2(x_0 + y_0) = 0$, soit $y_0 = -x_0$. En reportant dans (i) : $2x_0 = \frac{1}{x_0 - y_0}$, c'est-à-dire $x_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)}$. Ces relations donnent bien :

$$x_0 = -y_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)}.$$

Question 3 — Valeurs possibles de x_0 et y_0

Avec $y_0 = -x_0$, $x_0 - y_0 = 2x_0$, donc l'équation $x_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)}$ devient $x_0 = \frac{1}{4x_0}$, soit $4x_0^2 = 1$ et $x_0 = \pm \frac{1}{2}$.

Les points critiques sont $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et $(x_0, y_0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Question 4 — Minimum local en chaque point critique

En chaque point critique, $(x_0 - y_0)^2 = (2x_0)^2 = 4x_0^2 = 1$, donc $\frac{1}{(x_0 - y_0)^2} = 1$.

La hessienne y vaut :

$$H_\varphi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Caractère défini positif. La matrice est symétrique réelle. Ses valeurs propres : $\det(H - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 - 1 = (2 - \lambda)(4 - \lambda)$, donc $\lambda \in \{2, 4\}$. Les deux valeurs propres sont strictement positives.

D'après la condition suffisante d'extremum local pour une fonction \mathcal{C}^2 sur un ouvert, φ admet un **minimum local strict** en (x_0, y_0) .

Valeur du minimum. En $(1/2, -1/2)$: $\varphi = 1/4 + 1/4 - \ln 1 = \frac{1}{2}$. Idem en $(-1/2, 1/2)$ par symétrie $(x, y) \leftrightarrow (y, x)$.

φ admet un minimum local en chaque point critique, de valeur $\frac{1}{2}$.

Question 5 — Estimation $\sum_{n=2}^N |\ln(1 + (-1)^n/n)| = \mathcal{O}(N)$; insuffisance de la minoration

Exploitation du minimum local. Par la Question 4, il existe un voisinage V de $(1/2, -1/2)$ tel que $\varphi(x, y) \geq \frac{1}{2}$ sur V .

Pour $n \geq 2$, posons $x_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2n}$ et $y_n = -x_n = -\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2n}$. Alors $(x_n, y_n) \rightarrow (1/2, -1/2)$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc il existe $N_0 \geq 2$ tel que $(x_n, y_n) \in V$ pour tout $n \geq N_0$. On a :

$$x_n - y_n = 2x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad x_n^2 + y_n^2 = 2x_n^2 = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2n^2}.$$

Comme $1 + (-1)^n/n > 0$ pour $n \geq 2$: $|x_n - y_n| = 1 + (-1)^n/n$, et :

$$\varphi(x_n, y_n) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2n^2} - \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Pour $n \geq N_0$, on en déduit :

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \leq \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2n^2}. \quad (\star)$$

Bornes sur $|u_n|$ déduites de (\star) .

- **n pair** : $u_n = \ln(1 + 1/n) > 0$. L'inégalité (\star) donne $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$, donc $|u_n| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$.
- **n impair** : $u_n = \ln(1 - 1/n) < 0$. L'inégalité (\star) donne $u_n \leq -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$, soit $|u_n| = -u_n \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$. Cette inégalité est une **minoration** de $|u_n|$, et la minoration de φ ne fournit aucune majoration de $|u_n|$ pour n impair.

Borne grossière pour les indices impairs. Pour $n \geq 2$, $1 + (-1)^n/n \in [1/2, 3/2]$, donc :

$$|u_n| = |\ln(1 + (-1)^n/n)| \leq \ln 2.$$

Estimation $\mathcal{O}(N)$. En combinant les deux bornes ci-dessus, pour $N \geq N_0$:

$$\sum_{n=2}^N |u_n| = \sum_{\substack{2 \leq n \leq N \\ n \text{ pair}}} |u_n| + \sum_{\substack{2 \leq n \leq N \\ n \text{ impair}}} |u_n| \leq \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{N}{2} \ln 2.$$

Le premier terme est en $\mathcal{O}(\ln N)$, le second en $\mathcal{O}(N)$. Au total :

$$\sum_{n=2}^N |u_n| = \mathcal{O}(N).$$

$\forall N \geq 2, \quad \sum_{n=2}^N \left| \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \right| = \mathcal{O}(N).$

Insuffisance de la minoration. La minoration $\varphi \geq 1/2$ a permis d'obtenir une majoration de $|u_n|$ uniquement pour n pair (avec une borne sommable, en $1/n$), mais aucune majoration utile pour n impair (uniquement la borne triviale $\ln 2$, indépendante de n). C'est cette borne triviale qui produit le terme $\mathcal{O}(N)$.

Or, l'estimation $\mathcal{O}(N)$ pour la somme partielle $\sum_{n=2}^N |u_n|$ ne permet pas de conclure : une série à termes positifs peut très bien avoir des sommes partielles en $\mathcal{O}(N)$ tout en divergeant (ex. $\sum 1/n$: sommes partielles en $\mathcal{O}(\ln N) \subset \mathcal{O}(N)$ et série divergente) ou tout en convergeant (ex. $\sum 1/n^2$). Cette information est donc **insuffisante** pour étudier la nature de $\sum |u_n|$.

Remarque. La Question 6 de la Partie I avait déjà établi que $\sum u_n$ converge sans converger absolument ($|u_n| \sim 1/n$, donc $\sum |u_n|$ diverge). L'objet de la Question 5 est de constater que le détour par le calcul différentiel à deux variables — bien que naturel — ne fournit pas un cadre suffisamment fin pour atteindre cette conclusion.

Fin de la correction.

Excellence Maths — Cours particuliers en mathématiques, du collège aux CPGE
excellence-maths.fr