

Corrigé BCE 2026 — Mathématiques B/L

Filière littéraire — Programme ENS B/L

Code sujet 284 — Conception ESSEC BS / HEC Paris — 28 avril 2026

Corrigé rédigé par Zakaria Laouar, fondateur d'Excellence Maths, diplômé de l'École Polytechnique.

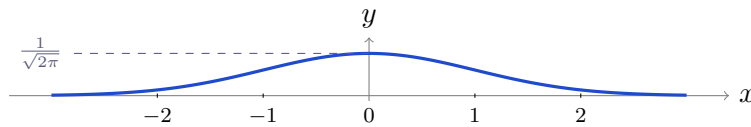
Exercice

$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Y = X^2 + 1$. On note Φ la fonction de répartition de X et F_Y celle de Y .

1. Une densité de X est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Allure de la courbe (cloche centrée en 0, maximum $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,399$, asymptote horizontale $y = 0$) :



2. **Symétrie de Φ** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (la densité f est paire).

Valeur en 0 : $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

3. On a $Y = X^2 + 1 \geq 1$ presque sûrement. Pour $y \leq 1$:

- si $y < 1$: $\{Y \leq y\} = \emptyset$ donc $F_Y(y) = 0$;
- si $y = 1$: $\{Y \leq 1\} = \{X^2 \leq 0\} = \{X = 0\}$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ car X est à densité.

Dans tous les cas, $F_Y(y) = 0$.

4. Soit $y > 1$. Alors $\sqrt{y-1}$ est bien défini et

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X^2 + 1 \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y - 1) = \mathbb{P}(-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}).$$

Donc

$$F_Y(y) = \Phi(\sqrt{y-1}) - \Phi(-\sqrt{y-1}).$$

La symétrie $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ donne $\Phi(-\sqrt{y-1}) = 1 - \Phi(\sqrt{y-1})$, d'où

$$F_Y(y) = 2\Phi(\sqrt{y-1}) - 1.$$

5. **Continuité.** F_Y est nulle sur $]-\infty, 1]$, et sur $]1, +\infty[$ elle vaut $2\Phi(\sqrt{y-1}) - 1$, qui est continue (composition). En $y = 1$: $\lim_{y \rightarrow 1^+} F_Y(y) = 2\Phi(0) - 1 = 0$. Donc F_Y est continue sur \mathbb{R} .

Dérivabilité. F_Y est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Sur $]1, +\infty[$:

$$F'_Y(y) = 2\Phi'(\sqrt{y-1}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-1}} = \frac{f(\sqrt{y-1})}{\sqrt{y-1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(y-1)}} e^{-(y-1)/2}.$$

Donc Y est une variable à densité, et une densité est

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi(y-1)}} e^{-(y-1)/2} & \text{si } y > 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. f_Y est une densité de probabilité, donc $\int_{\mathbb{R}} f_Y(y) dy = 1$, ce qui s'écrit

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-(y-1)/2}}{\sqrt{y-1}} dy = 1,$$

et l'intégrale étant convergente (puisque f_Y est intégrable),

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(y-1)/2}}{\sqrt{y-1}} dy = \sqrt{2\pi}.}$$

7. Effectuons le changement de variable $u = \frac{y-1}{2}$, soit $y-1 = 2u$ et $dy = 2 du$. Quand $y = 1$, $u = 0$; quand $y \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow +\infty$. La fonction $y \mapsto u$ étant un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme strictement croissant :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(y-1)/2}}{\sqrt{y-1}} dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{2u}} \cdot 2 du = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du.$$

La convergence à droite découle de celle de gauche (Q6). Avec la valeur $\sqrt{2\pi}$:

$$\sqrt{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{2\pi} \implies \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}.}$$

8. Comme X suit la loi normale centrée réduite, $\mathbb{E}(X) = 0$ et $V(X) = 1$, donc $\mathbb{E}(X^2) = V(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 1$. Par linéarité :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) + 1 = 2.$$

Y admet bien une espérance, et $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 2.}$

9. On utilise la définition de $\mathbb{E}(Y)$ par la densité, en écrivant $y = (y-1) + 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \int_1^{+\infty} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-(y-1)/2}}{\sqrt{y-1}} dy. \\ 2\sqrt{2\pi} &= \int_1^{+\infty} \frac{(y-1)e^{-(y-1)/2}}{\sqrt{y-1}} dy + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(y-1)/2}}{\sqrt{y-1}} dy. \\ 2\sqrt{2\pi} &= \int_1^{+\infty} \sqrt{y-1} e^{-(y-1)/2} dy + \sqrt{2\pi} \quad (\text{par Q6}). \end{aligned}$$

La convergence de l'intégrale étudiée découle de celle de $\mathbb{E}(Y)$. On obtient :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \sqrt{y-1} e^{-(y-1)/2} dy = \sqrt{2\pi}.}$$

10. Reprenons $u = \frac{y-1}{2}$ dans l'intégrale de Q9 :

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{y-1} e^{-(y-1)/2} dy = \int_0^{+\infty} \sqrt{2u} e^{-u} \cdot 2 du = 2\sqrt{2} \int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-u} du.$$

La convergence est conservée. Avec la valeur $\sqrt{2\pi}$:

$$2\sqrt{2} \int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-u} du = \sqrt{2\pi} \implies \boxed{\int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-u} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Remarque pédagogique : on retrouve les valeurs de la fonction Γ d'Euler en $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (Q7) et $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Q10).

Problème

\mathbb{R}^3 est muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme $\| \cdot \|$. Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$:

$$x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Partie I

1 (a). $\varepsilon_i \wedge \varepsilon_i$: par définition, en remplaçant y par x , toutes les composantes deviennent $x_jx_k - x_kx_j = 0$. Donc

$$\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_3 = (0, 0, 0).$$

1 (b). Calculs directs :

$$\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (0, 0, 1) = \varepsilon_3.$$

$$\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 = (1, 0, 0) = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_1 = (0, 1, 0) = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 = -\varepsilon_2.$$

2 (a). Avec $u = (1, 0, 2)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (1, 1, 1)$:

$$u \wedge v = (0 \cdot 0 - 2 \cdot 1, 2 \cdot 2 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) = (-2, 4, 1).$$

$$(u \wedge v) \wedge w = (4 \cdot 1 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1, (-2) \cdot 1 - 4 \cdot 1) = (3, 3, -6).$$

2 (b). Calculons aussi $u \wedge (v \wedge w)$:

$$v \wedge w = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1, 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = (1, -2, 1).$$

$$u \wedge (v \wedge w) = (0 \cdot 1 - 2 \cdot (-2), 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 1) = (4, 1, -2).$$

On a $(u \wedge v) \wedge w = (3, 3, -6) \neq (4, 1, -2) = u \wedge (v \wedge w)$, donc **le produit vectoriel n'est pas associatif**.

3 (a). $x \wedge x = (x_2x_3 - x_3x_2, x_3x_1 - x_1x_3, x_1x_2 - x_2x_1) = (0, 0, 0)$.

3 (b). Par antisymétrie des coordonnées :

$$y \wedge x = (y_2x_3 - y_3x_2, y_3x_1 - y_1x_3, y_1x_2 - y_2x_1) = -(x \wedge y).$$

Le produit vectoriel est **antisymétrique**.

3 (c). $(\lambda x) \wedge y = ((\lambda x_2)y_3 - (\lambda x_3)y_2, \dots) = \lambda(x \wedge y)$.

3 (d). $x \wedge (y + z)$: par bilinéarité des composantes,

$$x \wedge (y + z) = (x_2(y_3 + z_3) - x_3(y_2 + z_2), \dots) = x \wedge y + x \wedge z.$$

3 (e). Par antisymétrie et linéarité à droite :

$$(x + y) \wedge z = -z \wedge (x + y) = -z \wedge x - z \wedge y = x \wedge z + y \wedge z.$$

3 (f). $\langle x, x \wedge y \rangle = x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1)$. En développant, les six termes se compensent deux à deux :

$$\langle x, x \wedge y \rangle = 0.$$

Donc $x \perp x \wedge y$. De même $\langle y, x \wedge y \rangle = -\langle y, y \wedge x \rangle = 0$ par le même calcul (en échangeant les rôles), donc **y et $x \wedge y$ sont aussi orthogonaux**.

4 (a). $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \wedge w = 0\}$ avec $w = (1, 1, 1)$.

$$x \wedge w = (x_2 - x_3, x_3 - x_1, x_1 - x_2) = 0 \iff x_1 = x_2 = x_3.$$

Donc $E = \{(t, t, t), t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(w)$. C'est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 (image de l'application linéaire $t \mapsto tw$), de **base** $(w) = ((1, 1, 1))$ et de dimension 1.

4 (b). $F = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \wedge a = 0\}$ avec $a \neq 0$. C'est le noyau de l'application linéaire $\varphi : x \mapsto x \wedge a$ (linéarité par Q3 (c) et (e)), donc **c'est un sous-espace vectoriel** de \mathbb{R}^3 .

Soit $x \in F$. L'égalité $x \wedge a = 0$ équivaut à : pour tout $i \neq j$, $x_i a_j = x_j a_i$. Comme $a \neq 0$, supposons $a_1 \neq 0$ (les autres cas sont analogues). Alors $x_2 = \frac{a_2}{a_1} x_1$ et $x_3 = \frac{a_3}{a_1} x_1$, donc

$$x = \frac{x_1}{a_1} (a_1, a_2, a_3) = \frac{x_1}{a_1} a \in \text{Vect}(a).$$

Réciproquement, si $x = \lambda a$, alors $x \wedge a = \lambda(a \wedge a) = 0$. Donc $F = \text{Vect}(a)$, **base** (a) , dimension 1.

5. **Identité du double produit vectoriel.** On veut montrer

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z.$$

Posons $y \wedge z = (a_1, a_2, a_3)$ avec $a_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2$, $a_2 = y_3 z_1 - y_1 z_3$, $a_3 = y_1 z_2 - y_2 z_1$. La première composante de $x \wedge (y \wedge z)$ est :

$$x_2 a_3 - x_3 a_2 = x_2 (y_1 z_2 - y_2 z_1) - x_3 (y_3 z_1 - y_1 z_3) = y_1 (x_2 z_2 + x_3 z_3) - z_1 (x_2 y_2 + x_3 y_3).$$

On ajoute et retranche $x_1 y_1 z_1$:

$$= y_1 (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) - z_1 (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) = \langle x, z \rangle y_1 - \langle x, y \rangle z_1.$$

Les deux autres composantes se traitent identiquement (par permutation circulaire). On obtient

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z.$$

Formule similaire pour $(x \wedge y) \wedge z$. En utilisant l'antisymétrie :

$$(x \wedge y) \wedge z = -z \wedge (x \wedge y) = -(\langle z, y \rangle x - \langle z, x \rangle y) = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x.$$

$$(x \wedge y) \wedge z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x.$$

Partie II

$u = (p, q, r)$ avec $\|u\| = 1$ ($p^2 + q^2 + r^2 = 1$). $f(x) = u \wedge x$.

6 (a). Linéarité par Q3 (c) et (d) : $f(\lambda x + \mu y) = u \wedge (\lambda x + \mu y) = \lambda(u \wedge x) + \mu(u \wedge y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Et $f(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$. Donc f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

6 (b). $f(u) = u \wedge u = 0_{\mathbb{R}^3} = 0 \cdot u$. Donc **0 est valeur propre** de f , u est un vecteur propre associé.

D'après la Q4 (b), $f(x) = u \wedge x = 0 \iff x \in \text{Vect}(u)$. Donc le sous-espace propre associé à 0 est exactement $\text{Ker } f = \text{Vect}(u)$, de **base** (u) .

6 (c). Par le théorème du rang : $\text{rg}(f) = 3 - \dim \text{Ker } f = 3 - 1 = 2$.

6 (d). On calcule les images de la base canonique :

$$f(\varepsilon_1) = (p, q, r) \wedge (1, 0, 0) = (q \cdot 0 - r \cdot 0, r \cdot 1 - p \cdot 0, p \cdot 0 - q \cdot 1) = (0, r, -q).$$

$$f(\varepsilon_2) = (p, q, r) \wedge (0, 1, 0) = (-r, 0, p).$$

$$f(\varepsilon_3) = (p, q, r) \wedge (0, 0, 1) = (q, -p, 0).$$

On range ces images en colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

6 (e). $\text{rg}(M) = \text{rg}(f) = 2 < 3$, donc M n'est pas inversible.

7 (a). $p(x) = x - \langle u, x \rangle u$. Linéarité du produit scalaire :

$$p(\lambda x + \mu y) = \lambda x + \mu y - (\lambda \langle u, x \rangle + \mu \langle u, y \rangle) u = \lambda p(x) + \mu p(y).$$

$p(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$, donc p est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

7 (b). $p(u) = u - \langle u, u \rangle u = u - \|u\|^2 u = u - u = 0$.

7 (c).

$$p(p(x)) = p(x) - \langle u, p(x) \rangle u.$$

Or $\langle u, p(x) \rangle = \langle u, x \rangle - \langle u, x \rangle \langle u, u \rangle = \langle u, x \rangle - \langle u, x \rangle = 0$. Donc $p \circ p(x) = p(x)$: p est un projecteur de \mathbb{R}^3 .

7 (d). Soit $x \in \text{Im}(p)$: il existe y tel que $x = p(y)$. Alors $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$, donc $(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(x) = 0$, soit $x \in \text{Ker}(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

Réciproquement, si $(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(x) = 0$, alors $p(x) = x$, donc $x = p(x) \in \text{Im}(p)$.

Donc $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

7 (e). Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$: $\langle u, p(x) \rangle = 0$ (calcul en Q7 (c)). Donc $\text{Im}(p) \subset \text{Vect}(u)^\perp$.

Réciproquement, si $y \in \text{Vect}(u)^\perp$, alors $\langle u, y \rangle = 0$, donc $p(y) = y - 0 \cdot u = y$, soit $y \in \text{Im}(p)$.

Donc $\text{Im}(p) = \text{Vect}(u)^\perp$.

7 (f). $\text{Ker}(p) = \{x : x = \langle u, x \rangle u\} = \text{Vect}(u)$. **Base :** (u) .

7 (g). p est un projecteur (Q7 (c)), $\text{Ker}(p) = \text{Vect}(u)$ et $\text{Im}(p) = \text{Vect}(u)^\perp = \text{Ker}(p)^\perp$. Donc p projette sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Im}(p)^\perp$: c'est une **projection orthogonale** sur $\text{Vect}(u)^\perp$.

8 (a). $p(\varepsilon_i) = \varepsilon_i - \langle u, \varepsilon_i \rangle u = \varepsilon_i - u_i u$ (où $u_1 = p, u_2 = q, u_3 = r$). Donc :

$$p(\varepsilon_1) = (1 - p^2, -pq, -pr), \quad p(\varepsilon_2) = (-pq, 1 - q^2, -qr), \quad p(\varepsilon_3) = (-pr, -qr, 1 - r^2).$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p^2 & -pq & -pr \\ -pq & 1 - q^2 & -qr \\ -pr & -qr & 1 - r^2 \end{pmatrix} = I_3 - U U^T, \quad \text{où } U = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

8 (b). M^2 en fonction de P . D'après la Q5,

$$f^2(x) = u \wedge (u \wedge x) = \langle u, x \rangle u - \langle u, u \rangle x = \langle u, x \rangle u - x = -(x - \langle u, x \rangle u) = -p(x).$$

Donc $f^2 = -p$, soit $M^2 = -P$.

M^4 en fonction de M^2 . p étant un projecteur, $p^2 = p$, donc $P^2 = P$. Ainsi

$$M^4 = (M^2)^2 = (-P)^2 = P^2 = P = -M^2.$$

8 (c) (d). M^3 en fonction de M . Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:

$$f \circ p(x) = f(x - \langle u, x \rangle u) = f(x) - \langle u, x \rangle f(u) = f(x).$$

Donc $f \circ p = f$, et $f^3 = f \circ f^2 = f \circ (-p) = -f$. Soit $M^3 = -M$.

Cas général. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$M^{2n+1} = (-1)^n M \quad \text{et} \quad M^{2n+2} = (-1)^n M^2.$$

Initialisation : $M^1 = M = (-1)^0 M$ et $M^2 = (-1)^0 M^2$.

Hérédité : si $M^{2n+1} = (-1)^n M$, alors $M^{2(n+1)+1} = M^{2n+1} \cdot M^2 = (-1)^n M \cdot M^2 = (-1)^n M^3 = (-1)^{n+1} M$. De même pour M^{2n+2} , en utilisant $M^4 = -M^2$: $M^{2(n+1)+2} = M^{2n+2} \cdot M^2 = (-1)^n M^2 \cdot M^2 = (-1)^n M^4 = (-1)^{n+1} M^2$.

9 (a). p étant projection orthogonale sur $\text{Vect}(u)^\perp$:

- 0 est valeur propre, $E_0(p) = \text{Ker}(p) = \text{Vect}(u)$, dimension 1 ;
- 1 est valeur propre, $E_1(p) = \text{Im}(p) = \text{Vect}(u)^\perp$, dimension 2.

La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc P est **diagonalisable sur \mathbb{R}** , avec valeurs propres 0 et 1.

9 (b). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et $x \neq 0$ un vecteur propre. Alors $f(x) = \lambda x$, et :

$$f^2(x) = \lambda^2 x = -p(x).$$

Donc $p(x) = -\lambda^2 x$. Comme les valeurs propres de p sont 0 et 1 :

- Si $-\lambda^2 = 0$: $\lambda = 0$, et $p(x) = 0$, donc $x \in \text{Ker } p = \text{Vect}(u)$.
- Si $-\lambda^2 = 1$: $\lambda^2 = -1$, impossible dans \mathbb{R} .

La seule valeur propre réelle est $\lambda = 0$, de sous-espace propre $\text{Vect}(u)$ (dimension 1).

Comme $\dim E_0(M) = 1 \neq 3$, M n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} .

Remarque : M est cependant diagonalisable sur \mathbb{C} , avec valeurs propres 0, i , $-i$.

Partie III

10 (a). **Formule de Taylor avec reste intégral.** Récurrence sur n .

Cas $n = 0$: g est de classe \mathcal{C}^1 . Le théorème fondamental donne $g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t) dt$, ce qui est la formule pour $n = 0$.

Hérédité : supposons la formule vraie pour n , g étant maintenant de classe \mathcal{C}^{n+2} . Effectuons une intégration par parties dans le reste, avec

$$\alpha(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \alpha'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}, \quad \beta(t) = g^{(n+1)}(t), \quad \beta'(t) = g^{(n+2)}(t).$$

α et β sont \mathcal{C}^1 , donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+2)}(t) dt. \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

En reportant dans la formule de rang n , on obtient celle de rang $n + 1$.

10 (b). Récurrence sur k . Initialisation $k = 0$: $\cos^{(0)}(x) = \cos(x) = \cos(x + 0 \cdot \frac{\pi}{2})$.

Hérédité : si $\cos^{(k)}(x) = \cos(x + k\frac{\pi}{2})$, alors

$$\cos^{(k+1)}(x) = (\cos^{(k)})'(x) = -\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

10 (c). $\cos^{(k)}(0) = \cos(k\frac{\pi}{2})$.

- $k = 2m$ pair : $\cos(m\pi) = (-1)^m = (-1)^{k/2}$.
- k impair : $\cos((2m+1)\frac{\pi}{2}) = 0$.

10 (d). Appliquons la formule de Taylor (Q10 (a)) à $g = \cos$:

$$\cos(x) - \sum_{k=0}^n \cos^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cos^{(n+1)}(t) dt.$$

Or $|\cos^{(n+1)}(t)| = |\cos(t + (n+1)\frac{\pi}{2})| \leq 1$. Donc, en prenant la valeur absolue :

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^n \cos^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right| \leq \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right|.$$

Sur le segment d'extrémités 0 et x , $|x-t| \leq |x|$, donc

$$\left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} |x| = \frac{|x|^{n+1}}{n!}.$$

On peut être un peu plus fin en intégrant exactement : pour $x > 0$,

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

et de même pour $x < 0$ on obtient $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. D'où

$$\boxed{\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^n \cos^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

10 (e). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ (croissance comparée). D'après Q10 (d) :

$$\sum_{k=0}^n \cos^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos(x).$$

Or, par Q10 (c), seuls les indices pairs $k = 2j$ contribuent, avec $\cos^{(2j)}(0) = (-1)^j$:

$$\sum_{k=0}^{2N+1} \cos^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} = \sum_{j=0}^N (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}.$$

La suite des sommes partielles converge vers $\cos(x)$, donc la série $\sum (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ converge et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

10 (f). On admet la formule analogue $\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. À partir de Q10 (e), pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Donc

$$1 - \cos(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Pour $x \neq 0$, on divise par x^2 :

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}.$$

11 (a). D'après Q8 (d), pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M^{2n+1} = (-1)^n M$ et $M^{2n+2} = (-1)^n M^2$. Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=0}^N \frac{M^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M = \left(\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right) M.$$

Pour la seconde somme, $M^{2n} = M^{2(n-1)+2} = (-1)^{n-1} M^2$ (pour $n \geq 1$) :

$$\sum_{n=1}^N \frac{M^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} M^2 = \left(\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \right) M^2.$$

11 (b). On utilise les développements en série entière en $x = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} &= \sin(1) \quad (\text{série admise pour } \sin), \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = -(\cos(1) - 1) = 1 - \cos(1) \quad (\text{par Q10 (e)}). \end{aligned}$$

Donc, en passant à la limite $N \rightarrow +\infty$ dans Q11 (a) :

$$\boxed{\alpha = \sin(1), \quad \beta = 1 - \cos(1).}$$

11 (c).

$$\exp(M) = I_3 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M^{2n}}{(2n)!} = I_3 + \sin(1) M + (1 - \cos(1)) M^2.$$

Comme $\exp(f)$ est l'endomorphisme de matrice $\exp(M)$ dans la base canonique :

$$\boxed{\exp(f) = \text{id}_{\mathbb{R}^3} + \sin(1) f + (1 - \cos(1)) f^2.}$$

Partie IV

$g = \text{id}_{\mathbb{R}^3} + \sin(1) f + (1 - \cos(1)) f^2$; donc g est l'endomorphisme $\exp(f)$ obtenu en Q11 (c). $\mathcal{U} = (u, v, w)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^3 avec $v \wedge w = u$.

Préliminaire : la base \mathcal{U} étant orthonormale directe (relation $v \wedge w = u$), on a aussi $w \wedge u = v$ et $u \wedge v = w$.

Justification : on applique la deuxième formule de Q5, $(x \wedge y) \wedge z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x$.

Avec $x = v, y = w, z = v$: $(v \wedge w) \wedge v = \langle v, v \rangle w - \langle w, v \rangle v = 1 \cdot w - 0 = w$. Comme $v \wedge w = u$, il vient $u \wedge v = w$.

Avec $x = v, y = w, z = w$: $(v \wedge w) \wedge w = \langle v, w \rangle w - \langle w, w \rangle v = 0 - v = -v$. Donc $u \wedge w = -v$, soit $w \wedge u = v$.

12.

$$f(v) = u \wedge v = w.$$

$$f(w) = u \wedge w = -(w \wedge u) = -v.$$

13.

$$f^2(v) = f(f(v)) = f(w) = -v.$$

$$f^2(w) = f(f(w)) = f(-v) = -f(v) = -w.$$

14. $f(u) = u \wedge u = 0$, donc $f^2(u) = 0$. Ainsi :

$$g(u) = u + \sin(1) \cdot 0 + (1 - \cos(1)) \cdot 0 = u.$$

$$g(v) = v + \sin(1) f(v) + (1 - \cos(1)) f^2(v) = v + \sin(1) w + (1 - \cos(1))(-v).$$

$$\boxed{g(v) = \cos(1) v + \sin(1) w.}$$

$$g(w) = w + \sin(1) f(w) + (1 - \cos(1)) f^2(w) = w + \sin(1)(-v) + (1 - \cos(1))(-w).$$

$$\boxed{g(w) = -\sin(1) v + \cos(1) w.}$$

15 (a). Les coordonnées de $g(u), g(v), g(w)$ dans la base $\mathcal{U} = (u, v, w)$ se rangent en colonnes :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(1) & -\sin(1) \\ 0 & \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}.$$

15 (b).

$$G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(1) & \sin(1) \\ 0 & -\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}.$$

Calcul de $G^T G$: la première ligne et colonne donnent immédiatement le coefficient 1 et des 0 ; pour le bloc 2×2 inférieur droit :

$$\begin{pmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(1) + \sin^2(1) & 0 \\ 0 & \cos^2(1) + \sin^2(1) \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc

$$\boxed{G^T G = I_3.}$$

Conclusion : G est une matrice orthogonale, donc g est un endomorphisme orthogonal de \mathbb{R}^3 . Comme la base \mathcal{U} est orthonormale directe et que G est de déterminant $1 \cdot (\cos^2(1) + \sin^2(1)) = 1$, g est une **rotation** de \mathbb{R}^3 , d'axe $\text{Vect}(u)$ et d'angle 1 radian.

Interprétation finale : on a montré que $\exp(f)$ — où f est l'application $x \mapsto u \wedge x$ associée au vecteur unitaire u — est la rotation d'axe $\text{Vect}(u)$ et d'angle 1. C'est l'illustration d'un résultat classique : l'exponentielle d'une matrice antisymétrique est une matrice de rotation (formule de Rodrigues).

FIN du corrigé

Corrigé proposé par **Excellence Maths** — excellence-maths.fr
Cours particuliers de mathématiques pour CPGE B/L, ECG, scientifique et lycée.