

Correction détaillée

Composition de mathématiques – Sujet BL 2026

ENS Paris-PSL – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

Remarque importante. Le scan transmis comporte une lacune : les sous-questions (17b) et (17c) ne sont pas lisibles. Pour que la correction reste pleinement exploitable, on insère donc à cet endroit une **étude complète de la fonction h** (parité, dérivée, variations, extrema), ce qui permet de traiter sans ambiguïté les questions (17d) et (17e).

Problème A

Partie I

On considère

$$a(x, y, z) = \left(\frac{-y+z}{2}, \frac{y-z}{2}, \frac{\sqrt{2}x+y+z}{2} \right).$$

1a) Chaque coordonnée de $a(x, y, z)$ est une combinaison linéaire de x, y, z ; l'application a est donc linéaire. Dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , sa matrice est

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1b) On résout $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, soit

$$-y+z=0, \quad y-z=0, \quad \sqrt{2}x+y+z=0.$$

Les deux premières équations donnent $z=y$, puis la troisième devient $\sqrt{2}x+2y=0$, donc

$$y=z=-\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(a) = \text{Vect}((\sqrt{2}, -1, -1)).$$

1c) On lit sur la diagonale de A :

$$\text{Tr}(A) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

1d) Puisque le noyau est non nul, 0 est une valeur propre de a ; un vecteur propre associé est

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2a) On calcule

$$P = A^T A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2b) De même,

$$Q = AA^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2c) On en déduit immédiatement

$$\text{Tr}(P) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 2, \quad \text{Tr}(Q) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2.$$

3a) On vérifie par calcul direct que

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q.$$

Donc Q est un projecteur.

3b) Pour tout $X \in \mathbb{R}^3$,

$$X^T P X = X^T A^T A X = \|AX\|^2.$$

Ainsi, si $PX = 0$, alors $0 = X^T P X = \|AX\|^2$, donc $AX = 0$. La réciproque est immédiate. Donc

$$\text{Ker}(P) = \text{Ker}(A) = \text{Vect}((\sqrt{2}, -1, -1)).$$

On fixe désormais $k \geq 1$, une matrice $B \in M_k(\mathbb{R})$, et l'on pose

$$R = B^T B, \quad S = BB^T.$$

On suppose que R est un projecteur et que S est diagonalisable.

4a) Comme $R^2 = R$,

$$S^3 = (BB^T)^3 = B(B^T B)^2 B^T = BR^2 B^T = BRB^T = S^2.$$

4b) Puisque S est diagonalisable et vérifie $S^3 = S^2$, toute valeur propre λ de S vérifie

$$\lambda^3 = \lambda^2 \iff \lambda^2(\lambda - 1) = 0,$$

donc $\lambda \in \{0, 1\}$. Comme S est diagonalisable, il est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent 0 ou 1 ; on en déduit

$$S^2 = S.$$

Ainsi S est un projecteur.

5a) Pour tout $X \in \mathbb{R}^k$,

$$X \in \text{Ker}(R) \iff B^T B X = 0.$$

Or

$$X^T B^T B X = \|BX\|^2.$$

Donc

$$B^T B X = 0 \iff \|BX\|^2 = 0 \iff BX = 0.$$

Ainsi

$$\text{Ker}(R) = \text{Ker}(B).$$

5b) Les applications linéaires représentées par B et R ont le même noyau ; comme elles sont définies sur \mathbb{R}^k , le théorème du rang donne

$$\text{rg}(B) = k - \dim \text{Ker}(B) = k - \dim \text{Ker}(R) = \text{rg}(R).$$

5c) Comme R et S sont des projecteurs, leurs valeurs propres sont 0 ou 1, donc leur rang vaut leur trace. Par ailleurs,

$$\text{Tr}(S) = \text{Tr}(BB^T) = \text{Tr}(B^T B) = \text{Tr}(R).$$

Par suite,

$$\text{rg}(S) = \text{Tr}(S) = \text{Tr}(R) = \text{rg}(R) = \text{rg}(B).$$

Donc B et S ont le même rang.

Partie II

On considère deux projecteurs symétriques $U, W \in M_k(\mathbb{R})$, de même rang r . On choisit une famille orthonormée (e_1, \dots, e_r) de $\text{Im}(U)$ et une famille orthonormée (f_1, \dots, f_r) de $\text{Im}(W)$.

6) Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^k , toute famille orthonormée peut être complétée en une base orthonormée (par exemple par l'algorithme de Gram–Schmidt). Il existe donc des vecteurs e_{r+1}, \dots, e_k tels que (e_1, \dots, e_k) soit une base orthonormée de \mathbb{R}^k ; de même pour (f_1, \dots, f_k) .

7) Posons $h = f - g$. L'hypothèse donne, pour tous i, j ,

$$\langle h(e_i), e_j \rangle = 0.$$

Comme (e_1, \dots, e_k) est une base orthonormée, un vecteur dont tous les produits scalaires avec les e_j sont nuls est le vecteur nul. Donc

$$h(e_i) = 0 \quad (1 \leq i \leq k).$$

Ainsi h est nulle sur une base, donc $h = 0$, c'est-à-dire

$$f = g.$$

On définit l'endomorphisme c par

$$c(e_i) = \begin{cases} f_i, & 1 \leq i \leq r, \\ 0, & r + 1 \leq i \leq k. \end{cases}$$

On note C sa matrice dans la base canonique et u l'endomorphisme représenté par U .

8a) Si $1 \leq i, j \leq r$, alors $c(e_i) = f_i$ et $c(e_j) = f_j$, donc

$$\langle c(e_i), c(e_j) \rangle = \langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Si l'un des indices est $> r$, l'un des deux vecteurs est nul, donc le produit scalaire vaut 0. En résumé,

$$\langle c(e_i), c(e_j) \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \leq r, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

8b) Si $x \in \text{Im}(U)$, alors il existe y tel que $x = u(y)$, et donc

$$u(x) = u^2(y) = u(y) = x.$$

Réciproquement, si $u(x) = x$, alors $x = u(x) \in \text{Im}(U)$. Ainsi

$$\text{Im}(U) = \{x \in \mathbb{R}^k; u(x) = x\}.$$

8c) Comme (e_1, \dots, e_r) est une base orthonormée de $\text{Im}(U)$ et que $\dim \text{Im}(U) = r$, on a

$$\text{Im}(U) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r).$$

Pour $i \leq r$, on a donc $e_i \in \text{Im}(U)$, puis, d'après la question précédente,

$$u(e_i) = e_i.$$

D'autre part, puisque U est un projecteur symétrique, on a

$$\text{Ker}(U) = \text{Im}(U)^\perp.$$

Or e_{r+1}, \dots, e_k sont orthogonaux à e_1, \dots, e_r ; ils appartiennent donc à $\text{Im}(U)^\perp = \text{Ker}(U)$, d'où

$$u(e_i) = 0 \quad (i > r).$$

Par conséquent,

$$\langle u(e_i), e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \leq r, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

8d) Pour tous i, j ,

$$\langle C^T C(e_i), e_j \rangle = \langle C(e_i), C(e_j) \rangle = \langle c(e_i), c(e_j) \rangle.$$

D'après les questions **8a** et **8c**, on a donc

$$\langle C^T C(e_i), e_j \rangle = \langle u(e_i), e_j \rangle \quad \text{pour tous } i, j.$$

La question **7** appliquée à $f = u$ et $g = C^T C$ donne alors

$$U = C^T C.$$

Problème B

Partie I

On a, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$X_k \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right),$$

les variables étant indépendantes.

9a) La loi de X_1 est donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{n}, \quad \text{Var}(X_1) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}.$$

9b)

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}.$$

9c) Comme $2^{X_1} = 1$ si $X_1 = 0$ et 2 si $X_1 = 1$,

$$\mathbb{E}[2^{X_1}] = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

9d) L'indépendance donne

$$\mathbb{E}[2^{X_1 - X_2}] = \mathbb{E}[2^{X_1}] \mathbb{E}[2^{-X_2}].$$

Or

$$\mathbb{E}[2^{-X_2}] = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[2^{X_1 - X_2}] = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}.$$

On pose $S = \sum_{k=1}^n X_k$.

10a) La somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/n$ suit la loi binomiale

$$S \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$\mathbb{E}[S] = n \cdot \frac{1}{n} = 1, \quad \text{Var}(S) = n \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

10b)

$$\mathbb{E}[S^2] = \text{Var}(S) + \mathbb{E}[S]^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = 2 - \frac{1}{n}.$$

11a)

$$\mathbb{P}(S = 2) = \binom{n}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} = \frac{n-1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2}.$$

11b) Par symétrie, sachant qu'il y a exactement deux « piles », chacun des n lancers a la même probabilité d'en être un ; ainsi

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid S = 2) = \frac{2}{n}.$$

On peut aussi le retrouver par calcul direct.

12a) On écrit

$$SX_1 = X_1^2 + \sum_{k=2}^n X_1 X_k = X_1 + \sum_{k=2}^n X_1 X_k.$$

Par indépendance,

$$\mathbb{E}[SX_1] = \mathbb{E}[X_1] + \sum_{k=2}^n \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{n} + (n-1) \frac{1}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2}.$$

12b)

$$\text{Cov}(X_1, S) = \mathbb{E}[SX_1] - \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[S] = \frac{2n-1}{n^2} - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n^2}.$$

Donc

$$\text{Corr}(X_1, S) = \frac{\text{Cov}(X_1, S)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(S)}} = \frac{\frac{n-1}{n^2}}{\sqrt{\frac{n-1}{n^2} \cdot \frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La corrélation est positive, ce qui est naturel puisque X_1 intervient dans la somme S ; mais elle tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, car l'influence d'un lancer isolé devient faible devant l'ensemble des n lancers.

Pour tout réel x , on pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}.$$

13a) Par la formule du binôme,

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n.$$

Ainsi

$$f_n(1) = 1, \quad f_n(-1) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

13b) On reconnaît une limite exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}.$$

13c) On note $p_n = \mathbb{P}(S \text{ pair})$. Alors

$$\mathbb{E}[(-1)^S] = \sum_{k=0}^n (-1)^k \mathbb{P}(S = k) = p_n - (1 - p_n) = 2p_n - 1.$$

Or, comme $S \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$,

$$\mathbb{E}[(-1)^S] = f_n(-1).$$

On obtient donc

$$2p_n - 1 = f_n(-1), \quad \text{soit} \quad p_n = \frac{1 + f_n(-1)}{2}.$$

Comme $f_n(1) = 1$, on peut aussi écrire le système

$$\begin{cases} p_n + (1 - p_n) = f_n(1), \\ p_n - (1 - p_n) = f_n(-1), \end{cases}$$

dont on tire la même conclusion.

13d) En passant à la limite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1 + e^{-2}}{2}.$$

Partie II

Soit Z une variable aléatoire réelle continue de fonction de répartition

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

14a) La fonction F_Z est croissante, vérifie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_Z(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_Z(x) = 1,$$

et elle est continue à droite (en particulier en $x = 1$, où $F_Z(1) = 0$). C'est donc bien une fonction de répartition.

14b) Pour $x \neq 1$,

$$f_Z(x) = F'_Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{x^2}, & x > 1. \end{cases}$$

14c) Comme $Z \geq 1$ presque sûrement,

$$\mathbb{E}[Z] = \int_1^{+\infty} x \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

Cette intégrale diverge ; la variable Z n'admet donc pas d'espérance finie.

Soient Z_1, \dots, Z_n i.i.d. de même loi que Z , et

$$M_n = \frac{1}{n} \max(Z_1, \dots, Z_n).$$

15) L'événement $\{M_2 < 2\}$ équivaut à

$$\max(Z_1, Z_2) < 4,$$

soit à $\{Z_1 < 4, Z_2 < 4\}$. Par indépendance,

$$\mathbb{P}(Z_1 < 2 \mid M_2 < 2) = \frac{\mathbb{P}(Z_1 < 2, Z_2 < 4)}{\mathbb{P}(Z_1 < 4, Z_2 < 4)} = \frac{F_Z(2)F_Z(4)}{F_Z(4)^2}.$$

Or

$$F_Z(2) = \frac{1}{2}, \quad F_Z(4) = \frac{3}{4}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(Z_1 < 2 \mid M_2 < 2) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

16a) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(\max(Z_1, \dots, Z_n) \leq nx).$$

Ainsi,

$$F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{n}, \\ (F_Z(nx))^n = \left(1 - \frac{1}{nx}\right)^n, & x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

16b) Pour $x \geq \frac{1}{n}$,

$$\mathbb{P}(M_n > x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{nx}\right)^n.$$

Or, pour $u \in [0, 1]$, on a $(1 - u)^n \leq 1 - u$, donc

$$1 - (1 - u)^n \geq u.$$

En prenant $u = \frac{1}{nx}$, il vient

$$\mathbb{P}(M_n > x) \geq \frac{1}{nx} \quad \left(x \geq \frac{1}{n}\right).$$

Comme pour une variable positive Y , on a

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y > x) dx,$$

on obtient ici

$$\mathbb{E}[M_n] \geq \int_{1/n}^{+\infty} \frac{dx}{nx},$$

et cette intégrale diverge. Donc, pour tout $n \geq 2$, la variable M_n n'admet pas d'espérance finie.

16c) Si $x \leq 0$, alors $F_{M_n}(x) = 0$ pour tout n , donc

$$F(x) = 0.$$

Si $x > 0$, alors pour n assez grand on a $x \geq \frac{1}{n}$, et

$$F_{M_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{nx}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1/x}.$$

Donc

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases}$$

16d) La fonction F est croissante; en effet, sur $]0, +\infty[$,

$$F'(x) = e^{-1/x} \frac{1}{x^2} > 0.$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0 = F(0).$$

Elle est donc continue à droite en tout point. Ainsi, F est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Problème C

On considère la fonction

$$h(t) = t^2 e^{-t^2}.$$

17a) Comme l'exponentielle domine toute puissance,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^2 e^{-t^2} = 0.$$

Complément d'étude de h (pour compenser l'illisibilité des questions 17b et 17c).

La fonction h est paire, car $h(-t) = h(t)$. Sa dérivée vaut

$$h'(t) = 2t(1 - t^2)e^{-t^2}.$$

Le signe de h' est donc celui de $t(1 - t^2)$. On en déduit que h est croissante sur $] -\infty, -1]$, décroissante sur $[-1, 0]$, croissante sur $[0, 1]$, puis décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus,

$$h(-1) = h(1) = e^{-1}, \quad h(0) = 0.$$

Ainsi, h admet deux maxima en ± 1 , de valeur e^{-1} , et un minimum en 0 , de valeur 0 .

17d) On calcule

$$h''(t) = 2(2t^4 - 5t^2 + 1)e^{-t^2}.$$

Comme $e^{-t^2} > 0$, il suffit d'étudier

$$2t^4 - 5t^2 + 1 = 0.$$

En posant $u = t^2$, on obtient

$$2u^2 - 5u + 1 = 0, \quad u = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Les points d'inflexion sont donc les quatre réels

$$t = \pm \sqrt{\frac{5 - \sqrt{17}}{4}}, \quad t = \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}}.$$

17e) La tangente en $t = 0$ est horizontale, car $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$; son équation est donc

$$y = 0.$$

Le graphe est une courbe paire, positive, passant par l'origine, atteignant ses deux sommets en $(\pm 1, e^{-1})$, puis retombant vers 0 aux deux infinis.

On considère maintenant

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

18a) L'intégrale est définie pour tout réel x , mais le facteur $1/x$ impose

$$D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

18b) Pour $x \neq 0$,

$$f(-x) = \frac{-1}{x} \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2} dt = \frac{1}{x} \int_{-2x}^{-x} e^{-t^2} dt.$$

Par le changement de variable $u = -t$ et la parité de $t \mapsto e^{-t^2}$,

$$\int_{-2x}^{-x} e^{-t^2} dt = \int_x^{2x} e^{-u^2} du.$$

Donc

$$f(-x) = f(x),$$

ainsi f est paire.

19a) Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est décroissante sur $[x, 2x]$, donc, pour tout $t \in [x, 2x]$,

$$e^{-4x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}.$$

En intégrant puis en divisant par $x > 0$, on obtient

$$e^{-4x^2} \leq f(x) \leq e^{-x^2}.$$

Comme f est paire, cette inégalité vaut pour tout $x \in D_f$.

19b) D'après la question précédente,

$$e^{-4x^2} \leq f(x) \leq e^{-x^2} \quad (x > 0).$$

Les deux bornes tendent vers 1 quand $x \rightarrow 0^+$; par encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

19c) Toujours par encadrement,

$$0 \leq f(x) \leq e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

19d) Sur $]0, +\infty[$,

$$0 \leq f(x) \leq e^{-x^2}.$$

Ainsi l'intégrale impropre converge par comparaison avec $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, qui est finie. On dispose par exemple de l'encadrement

$$0 \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

et l'on peut aussi noter que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 1 dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = 1 + e^{-1}.$$

On note H une primitive de h .

20a) Posons

$$g(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

Alors $f(x) = g(x)/x$ sur D_f . Par la formule de Leibniz,

$$g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.$$

Or

$$g'(x) = xf'(x) + f(x).$$

Donc, pour tout $x \in D_f$,

$$xf'(x) + f(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.$$

Cette formule est utile, mais pour étudier le signe de f' , on peut aussi écrire

$$(e^{-t^2}t)' = e^{-t^2} - 2t^2e^{-t^2} = e^{-t^2} - 2h(t).$$

En intégrant entre x et $2x$, il vient

$$\int_x^{2x} e^{-t^2} dt = x(2e^{-4x^2} - e^{-x^2}) + 2(H(2x) - H(x)).$$

Comme le membre de gauche vaut $xf(x)$ et que $2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = xf'(x) + f(x)$, on obtient finalement

$$x^2 f'(x) = -2(H(2x) - H(x)).$$

20b) La fonction $h(t) = t^2 e^{-t^2}$ est positive, et même strictement positive sur \mathbb{R}^* . Toute primitive H de h est donc strictement croissante.

Si $x > 0$, alors $2x > x$, donc $H(2x) - H(x) > 0$, et la formule précédente donne

$$f'(x) < 0.$$

Si $x < 0$, alors $2x < x$, donc $H(2x) - H(x) < 0$, et donc

$$f'(x) > 0.$$

Ainsi, f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $]0, +\infty[$. Avec les limites obtenues précédemment et la parité de f , on obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	0^-	0^+	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	
$f(x)$	0	$\nearrow 1$	$1 \searrow$	0

(où f n'est pas définie en 0, mais admet de part et d'autre la limite 1).

21a) Le développement limité usuel de l'exponentielle donne, en remplaçant u par $-t^2$,

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + o(t^6) \quad (t \rightarrow 0).$$

21b) Posons

$$I_x = [\min(x, 2x), \max(x, 2x)].$$

Alors

$$\left| \frac{1}{x^3} \int_x^{2x} t^2 \varepsilon(t) dt \right| \leq \sup_{t \in I_x} |\varepsilon(t)| \cdot \frac{1}{|x|^3} \left| \int_x^{2x} t^2 dt \right|.$$

Or

$$\int_x^{2x} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_x^{2x} = \frac{7x^3}{3}.$$

Donc

$$\left| \frac{1}{x^3} \int_x^{2x} t^2 \varepsilon(t) dt \right| \leq \frac{7}{3} \sup_{t \in I_x} |\varepsilon(t)|.$$

Comme I_x se resserre vers $\{0\}$ quand $x \rightarrow 0$ et que ε est continue en 0 avec $\varepsilon(0) = 0$, le membre de droite tend vers 0. Ainsi,

$$\frac{1}{x^3} \int_x^{2x} t^2 \varepsilon(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

21c) D'après la question **21a**, on peut écrire

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + t^2 \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Alors

$$\int_x^{2x} e^{-t^2} dt = \int_x^{2x} 1 dt - \int_x^{2x} t^2 dt + \int_x^{2x} t^2 \varepsilon(t) dt.$$

Soit

$$\int_x^{2x} e^{-t^2} dt = x - \frac{7x^3}{3} + o(x^3).$$

En divisant par $x \neq 0$, on obtient

$$f(x) = 1 - \frac{7}{3}x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0).$$

21d) Le graphe de f présente en réalité un **trou** en $x = 0$, puisque f n'est pas définie en 0 mais admet la limite 1. Si l'on prolonge f par continuité en posant

$$\tilde{f}(0) = 1,$$

alors, d'après le développement limité précédent,

$$\tilde{f}(x) = 1 - \frac{7}{3}x^2 + o(x^2).$$

Le prolongement continu admet donc en 0 une tangente horizontale d'équation

$$y = 1.$$

De plus,

$$\tilde{f}(x) - 1 = -\frac{7}{3}x^2 + o(x^2) < 0 \quad \text{pour } x \neq 0 \text{ assez proche de } 0,$$

si bien que le graphe est localement situé **au-dessous** de cette tangente. Enfin, il n'y a pas de point d'inflexion en 0 pour le prolongement continu, puisque le terme dominant est quadratique de signe constant et que

$$\tilde{f}''(0) = -\frac{14}{3} \neq 0.$$

22a) Fixons $x > 0$. D'après la question **19a**, on a

$$0 < f(x) < 1.$$

La fonction

$$u \mapsto e^{-u^2}$$

est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $]0, 1]$. Il existe donc un unique réel $u_x > 0$ tel que

$$f(x) = e^{-u_x^2}.$$

En posant

$$\alpha_x = \frac{u_x}{x} > 0,$$

on obtient l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha_x > 0$ vérifiant

$$f(x) = e^{-(\alpha_x x)^2}.$$

22b) Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est strictement décroissante sur $[x, 2x]$; comme elle n'est pas constante sur cet intervalle, sa moyenne vérifie les inégalités strictes

$$e^{-4x^2} < f(x) < e^{-x^2}.$$

Or

$$f(x) = e^{-(\alpha_x x)^2}.$$

Comme $u \mapsto e^{-u^2}$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit

$$x < \alpha_x x < 2x.$$

Puisque $x > 0$, cela donne

$$\alpha_x \in]1, 2[.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère maintenant

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} t^n e^{-t^2} dt,$$

et l'on admet que son domaine de définition est encore $D_f = \mathbb{R}^*$.

23a) La fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ a la parité de $t \mapsto t^n$: elle est paire si n est pair, impaire si n est impair. Un calcul analogue à celui de la question **18b** donne alors

$$f_n(-x) = (-1)^n f_n(x).$$

Ainsi,

$$\boxed{f_n \text{ est paire si } n \text{ est pair, et impaire si } n \text{ est impair.}}$$

23b) On utilise

$$(e^{-t^2})' = -2te^{-t^2}.$$

Alors

$$\int_x^{2x} te^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \right]_x^{2x} = \frac{1}{2}(e^{-x^2} - e^{-4x^2}).$$

Donc

$$f_1(x) = \frac{e^{-x^2} - e^{-4x^2}}{2x}.$$

23c) Pour $n \geq 2$, on intègre par parties en écrivant

$$\int_x^{2x} t^n e^{-t^2} dt = \int_x^{2x} t^{n-1} (te^{-t^2}) dt.$$

On prend

$$u(t) = t^{n-1}, \quad v'(t) = te^{-t^2}, \quad v(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}.$$

On obtient

$$\int_x^{2x} t^n e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2}t^{n-1}e^{-t^2} \right]_x^{2x} + \frac{n-1}{2} \int_x^{2x} t^{n-2} e^{-t^2} dt.$$

Après division par x , il vient

$$f_n(x) = \frac{n-1}{2} f_{n-2}(x) + \frac{1}{2x} (x^{n-1} e^{-x^2} - (2x)^{n-1} e^{-4x^2}).$$

Autrement dit,

$$\boxed{f_n(x) = \frac{n-1}{2} f_{n-2}(x) + \frac{x^{n-2}}{2} (e^{-x^2} - 2^{n-1} e^{-4x^2})} \quad (x \in D_f, n \geq 2).$$

Fin de la correction