Correction détaillée

EDHEC BS – Mathématiques appliquées – ECG voie générale
Concours 2026

Rédaction Excellence Maths

Exercice 1

On considère $a > 1$, $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

1. La fonction demandée est :

```
def suite_u(a, n):
    u = a
    for k in range(1, n+1):
        u = u**2 - u + 1
    return u
```

On initialise bien u à la valeur $u_0 = a$, puis la boucle effectue n fois la relation de récurrence.

2. Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ. Comme la fonction $x \mapsto x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut passer à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell = \ell^2 - \ell + 1.$$

Ainsi

$$\ell^2 - 2\ell + 1 = 0, \qquad \text{donc} \qquad (\ell - 1)^2 = 0.$$

Donc, si la suite converge, sa limite est nécessairement

$$\boxed{\ell = 1}.$$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geq 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante.

b) Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq u_0 = a.$$

En particulier, $u_n > 1$ pour tout n.

c) Si (u_n) convergeait, sa limite vaudrait 1 d'après la question 2. Or, puisque $u_n \geq a > 1$ pour tout n, une éventuelle limite ℓ vérifierait $\ell \geq a > 1$, contradiction.

La suite croissante (u_n) ne converge donc pas vers une limite finie. Une suite croissante qui ne converge pas vers un réel tend vers $+\infty$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}.$$

4. Puisque $u_n \to +\infty$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - u_n + 1}{u_n^2} = 1 - \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Donc

$$\boxed{u_{n+1} \sim_{+\infty} u_n^2}.$$

La bonne proposition est donc **O2**.

5. **a)** On a montré que $u_n \geq a > 1$ pour tout n, donc $u_n - 1 > 0$. De plus

$$u_{n+1} - 1 = u_n^2 - u_n = u_n(u_n - 1) > 0.$$

Les deux fractions existent donc. Puis

$$\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n(u_n - 1)} = \frac{u_n - 1}{u_n(u_n - 1)} = \frac{1}{u_n}.$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n}}.$$

b) En sommant l'identité précédente de $k = 0$ à n, on obtient une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1} \right) = \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}.$$

Comme $u_0 = a$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}}.$$

c) Les termes $1/u_k$ sont positifs et, d'après la question 3, $u_{n+1} \to +\infty$. Donc

$$\frac{1}{u_{n+1} - 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

En passant à la limite dans la formule précédente,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a - 1}}.$$

La série de terme général $1/u_n$ converge.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $a = 2$.

6. **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, donc $1/u_n > 0$. D'après la question 5.c avec $a = 2$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2 - 1} = 1.$$

La famille $(1/u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une famille de réels positifs de somme 1. Elle définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ en posant

$$\boxed{\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{u_n}}.$$

b) Pour $n \geq 2$, on a $2^n \geq 4$, donc $2^n - 3 \geq 1$. Alors

$$2^n(2^n - 1) + 1 - 2^{n+1} = 2^n(2^n - 1 - 2) + 1 = 2^n(2^n - 3) + 1 \geq 0.$$

Ainsi

$$\boxed{2^n(2^n - 1) + 1 \geq 2^{n+1} \qquad (n \geq 2)}.$$

Remarque

Dans l'énoncé transmis, l'inégalité imprimée semble être $u_n \geq 2^{2^n}$. Cette affirmation est fausse, car $u_1 = 2^2 - 2 + 1 = 3 < 4 = 2^{2^1}$. La question 6.b permet naturellement de démontrer l'inégalité $u_n \geq 2^n$, qui est suffisante pour établir l'existence de l'espérance et de la variance en 6.d. La correction ci-dessous traite cette version cohérente de la question.

c)

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq 2^n.$$

On vérifie d'abord

$$u_0 = 2 \geq 1 = 2^0, \qquad u_1 = 3 \geq 2 = 2^1, \qquad u_2 = 7 \geq 4 = 2^2.$$

Supposons maintenant que, pour un certain $n \geq 2$, $u_n \geq 2^n$. Comme $x \mapsto x(x-1)+1$ est croissante sur $[1, +\infty[$ et comme $u_n \geq 2^n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 1 \geq 2^n(2^n - 1) + 1.$$

D'après 6.b,

$$u_{n+1} \geq 2^{n+1}.$$

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 2^n}.$$

d) Pour montrer que X possède une espérance et une variance, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} n^2 \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{u_n}$$

converge. En effet, l'existence du moment d'ordre 2 implique celle de l'espérance et de la variance.

D'après l'inégalité précédente,

$$0 \leq \frac{n^2}{u_n} \leq \frac{n^2}{2^n}.$$

Or la série $\sum n^2/2^n$ converge, par exemple par croissances comparées ou par le critère de d'Alembert. Donc, par comparaison,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{u_n} \quad \text{converge.}$$

Ainsi

$$\boxed{X \text{ possède une espérance et une variance.}}$$

Exercice 2

On cherche les fonctions f et g, dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f(0) = g(0) = 1$ et

$$(S): \quad \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x), \\ g'(x) = 2f(x) + 5g(x). \end{cases}$$

1. a) Le système s'écrit sous forme matricielle

$$Y'(x) = MY(x), \qquad Y(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

C'est un système différentiel linéaire à coefficients constants. Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes linéaires assure l'existence et l'unicité d'une solution vérifiant la condition initiale

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le problème possède donc un unique couple solution (f, g).

b) Comme f et g sont dérivables, les fonctions

$$f - 2g \quad \text{et} \quad 2f + 5g$$

sont dérivables. Or ce sont respectivement f' et g'. Donc f' et g' sont dérivables, c'est-à-dire que f et g sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

2. Première méthode.

a) En dérivant la première équation de (S),

$$f'' = f' - 2g'.$$

En utilisant (S),

$$f'' = (f - 2g) - 2(2f + 5g) = -3f - 12g.$$

Par ailleurs, la première équation donne

$$g = \frac{f - f'}{2}.$$

Donc

$$f'' = -3f - 12 \cdot \frac{f - f'}{2} = -3f - 6f + 6f' = 6f' - 9f.$$

Ainsi

$$\boxed{f'' - 6f' + 9f = 0}.$$

b) On a

$$f'(0) = f(0) - 2g(0) = 1 - 2 = -1.$$

Donc

$$\boxed{f'(0) = -1}.$$

c) L'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

a pour équation caractéristique

$$r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0.$$

Donc ses solutions sont de la forme

$$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{3x}.$$

Ainsi

$$f(x) = (\alpha x + \beta)e^{3x}.$$

La condition $f(0) = 1$ donne $\beta = 1$. De plus

$$f'(x) = (\alpha + 3\alpha x + 3\beta)e^{3x},$$

donc

$$f'(0) = \alpha + 3\beta = \alpha + 3 = -1.$$

Ainsi $\alpha = -4$. On obtient donc

$$\boxed{f(x) = (1 - 4x)e^{3x}}.$$

d) D'après $f' = f - 2g$,

$$g = \frac{f - f'}{2}.$$

Or

$$f'(x) = (-1 - 12x)e^{3x}.$$

Donc

$$g(x) = \frac{(1 - 4x)e^{3x} - (-1 - 12x)e^{3x}}{2} = (1 + 4x)e^{3x}.$$

Ainsi

$$\boxed{g(x) = (1 + 4x)e^{3x}}.$$

3. Deuxième méthode : on pose $h = f + g$.

a) En additionnant les deux équations de (S),

$$h' = f' + g' = f - 2g + 2f + 5g = 3f + 3g = 3h.$$

La première équation de (S) reste inchangée. Ainsi (S) équivaut bien à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x), \\ h'(x) = 3h(x). \end{cases}$$

b) On a

$$h(0) = f(0) + g(0) = 2.$$

L'équation $h' = 3h$ donne

$$h(x) = Ce^{3x}.$$

Avec $h(0) = 2$, on obtient $C = 2$, donc

$$\boxed{h(x) = 2e^{3x}}.$$

c) Comme $h = f + g$, on a

$$g = h - f = 2e^{3x} - f.$$

Alors

$$f' = f - 2g = f - 2(2e^{3x} - f) = 3f - 4e^{3x}.$$

On obtient donc

$$(S) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x}, \\ (f + g)(x) = 2e^{3x}. \end{cases}$$

4. On considère

$$(ED) : \quad y' = 3y - 4e^{3x}.$$

a) Pour $f_a(x) = axe^{3x}$,

$$f_a'(x) = a(1+3x)e^{3x}.$$

De plus

$$3f_a(x) - 4e^{3x} = (3ax-4)e^{3x}.$$

On veut donc

$$a(1+3x) = 3ax - 4$$

pour tout x, ce qui donne $a = -4$. Ainsi

$$\boxed{a = -4}.$$

b) Les solutions de l'équation homogène $y' = 3y$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{3x}$. Une solution particulière est $x \mapsto -4xe^{3x}$. Donc

$$f(x) = (C-4x)e^{3x}.$$

La condition $f(0) = 1$ donne $C = 1$, d'où

$$\boxed{f(x) = (1-4x)e^{3x}}.$$

c) Comme $f + g = 2e^{3x}$,

$$g(x) = 2e^{3x} - f(x) = (1+4x)e^{3x}.$$

Donc finalement

$$\boxed{f(x) = (1-4x)e^{3x}}, \qquad \boxed{g(x) = (1+4x)e^{3x}}.$$

5. a) Les fonctions Python sont :

```
def f(x):
    return (1 - 4*x) * np.exp(3*x)

def g(x):
    return (1 + 4*x) * np.exp(3*x)
```

b) Un script possible est :

```
x = np.linspace(-1/2, 1/2, 200)
plt.plot(x, f(x), label="f")
plt.plot(x, g(x), label="g")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Exercice 3

Soit $n \geq 2$. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0, \theta]$, avec $\theta \in [5, 7]$. Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi que X. On pose

$$Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

1. a) La fonction de répartition de X est

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 1, & x \geq \theta. \end{cases}$$

b) Pour une loi uniforme sur $[0, \theta]$,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{2}}, \qquad \boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{\theta^2}{12}}.$$

2. a) Pour tout réel x,

$$F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x).$$

Par indépendance,

$$F_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \leq x) = F(x)^n.$$

Ainsi

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \left(\dfrac{x}{\theta}\right)^n, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 1, & x \geq \theta. \end{cases}$$

b) La fonction F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux. Donc Y_n est une variable aléatoire à densité. Une densité est obtenue en dérivant F_n sur les intervalles où elle est dérivable :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut modifier les valeurs en 0 et θ sans changer la densité.

3. a) Si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(\theta U \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \mathbb{P}\left(U \leq \dfrac{x}{\theta}\right) = \dfrac{x}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 1, & x \geq \theta. \end{cases}$$

C'est la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, \theta]$. Donc $\theta U \sim \mathcal{U}([0, \theta])$.

b) La fonction peut être complétée ainsi :

```
def var_Y(theta, n):
    X = theta * rd.random(n)
    Y = np.max(X)
    return Y
```

4. **a)** Comme Y_n est bornée entre 0 et θ, elle possède une espérance. On calcule

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^\theta x \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n\,\mathrm{d}x = \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{\theta^{n+1}}{n+1}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n\theta}{n+1}}.$$

b) De même, Y_n possède un moment d'ordre 2, et

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \int_0^\theta x^2 \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n\theta^2}{n+2}.$$

Alors

$$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - \mathbb{E}(Y_n)^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2.$$

En réduisant au même dénominateur,

$$\mathbb{V}(Y_n) = \theta^2\frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \theta^2\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{V}(Y_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}}.$$

5. On pose

$$Z_n = \frac{n+1}{n}Y_n.$$

a) Z_n est une fonction de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ et ne dépend pas de θ autrement que par les observations : c'est donc un estimateur de θ.

De plus,

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{n+1}{n}\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n\theta}{n+1} = \theta.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \theta}.$$

L'estimateur est sans biais.

b) On a

$$\mathbb{V}(Z_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\mathbb{V}(Y_n).$$

Donc

$$\mathbb{V}(Z_n) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{V}(Z_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}}.$$

6. **a)** Comme $\theta \in [5, 7]$, on a $\theta^2 \leq 49$. Si $n \geq 47$, alors $n + 2 \geq 49$, donc

$$\boxed{\frac{\theta^2}{n+2} \leq 1}.$$

b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à Z_n donne, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(Z_n)}{\varepsilon^2}.$$

Comme $\mathbb{E}(Z_n) = \theta$ et $\mathbb{V}(Z_n) = \theta^2/[n(n+2)]$,

$$\mathbb{P}(|Z_n - \theta| > \varepsilon) \leq \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(|Z_n - \theta| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}.$$

Si $n \geq 47$, alors $\theta^2/(n+2) \leq 1$, d'où

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|Z_n - \theta| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}}.$$

c) On prend $\varepsilon = 1/10$. Alors, si $n \geq 2000$,

$$\mathbb{P}\left(|Z_n - \theta| \leq \frac{1}{10}\right) \geq 1 - \frac{1}{n(1/10)^2} = 1 - \frac{100}{n} \geq 1 - \frac{100}{2000} = 0,95.$$

Or

$$|Z_n - \theta| \leq \frac{1}{10} \Longleftrightarrow \theta \in \left[Z_n - \frac{1}{10}, Z_n + \frac{1}{10}\right].$$

Ainsi, pour $n \geq 2000$,

$$\boxed{\left[Z_n - \frac{1}{10}, Z_n + \frac{1}{10}\right] \text{ est un intervalle de confiance pour } \theta \text{ de niveau au moins } 0,95.}$$

7. Le code effectue 1000 simulations indépendantes. À chaque répétition, il simule Y_{2000} avec le paramètre θ, calcule

$$z = \frac{2001}{2000}y,$$

c'est-à-dire une simulation de Z_{2000}, puis teste si

$$|Z_{2000} - \theta| \leq 0,1.$$

La variable c compte le nombre de réussites parmi 1000 essais, puis la fonction renvoie $c/1000$. Ainsi, l'instruction

```
print(mystere(6))
```

affiche une approximation numérique, par fréquence empirique, de la probabilité

$$\mathbb{P}\left(|Z_{2000} - 6| \leq 0,1\right).$$

Autrement dit, elle estime la probabilité que l'intervalle de confiance

$$[Z_{2000} - 0,1, Z_{2000} + 0,1]$$

contienne la vraie valeur $\theta = 6$.

Problème

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Partie 1 – Préliminaires

1. a) Chaque coefficient de J_n^2 est égal à la somme de n termes égaux à 1, donc

$$J_n^2 = nJ_n.$$

Ainsi

$$P(J_n) = J_n^2 - nJ_n = 0.$$

Donc

$$\boxed{P(X) = X^2 - nX \text{ est un polynôme annulateur de } J_n}.$$

b) La matrice J_n est réelle symétrique, donc elle est diagonalisable.

De plus, le vecteur

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

vérifie

$$J_nU = nU.$$

Donc n est valeur propre de J_n.

Si $n \geq 2$, le vecteur $e_1 - e_2$ est non nul et vérifie

$$J_n(e_1 - e_2) = 0.$$

Donc 0 est aussi valeur propre de J_n.

Les deux valeurs propres mises en évidence sont donc

$$\boxed{0 \quad \text{et} \quad n}.$$

c) Soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On a

$$J_nX = \begin{pmatrix} x_1 + \cdots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi $J_nX = nX$ équivaut à

$$x_1 + \cdots + x_n = nx_i \qquad \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Le membre de gauche étant indépendant de i, on obtient

$$nx_1 = nx_2 = \cdots = nx_n,$$

donc

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Réciproquement, si toutes les coordonnées de X sont égales, alors $J_nX = nX$. Donc

$$\boxed{J_nX = nX \Longleftrightarrow x_2 = x_1,\ x_3 = x_1,\ \ldots,\ x_n = x_1.}$$

d) D'après la question précédente, les vecteurs propres associés à la valeur propre n sont exactement les vecteurs dont toutes les coordonnées sont égales. Donc

$$E_n(J_n) = \mathrm{Vect}(U).$$

Ainsi

$$\boxed{\dim E_n(J_n) = 1 \quad \text{et} \quad E_n(J_n) = \mathrm{Vect}(U)}.$$

Partie 2 – Quelques généralités

On rappelle que $E_n(d)$ désigne l'ensemble des graphes d'ordre n, de diamètre $D = 2$ et de degré maximal d.

2. a) Le graphe donné possède 4 sommets. Chaque sommet est de degré 2, donc son degré maximal vaut 2. De plus, deux sommets non voisins sont reliés par une chaîne de longueur 2, et deux sommets voisins sont à distance 1. Le diamètre est donc 2.

Ainsi le graphe appartient à

$$\boxed{E_4(2)}.$$

b) Les graphes de $E_5(2)$ sont les graphes à 5 sommets, connexes, de diamètre 2, et de degré maximal 2.

— G_1 est un cycle à 5 sommets. Tous les sommets sont de degré 2 et le diamètre d'un cycle à 5 sommets vaut 2. Donc $G_1 \in E_5(2)$.

— G_2 possède des sommets de degré strictement supérieur à 2 : il n'appartient donc pas à $E_5(2)$.

— G_3 est aussi un cycle à 5 sommets, par exemple le cycle $2 - 5 - 3 - 1 - 4 - 2$. Tous les sommets sont de degré 2 et son diamètre vaut 2. Donc $G_3 \in E_5(2)$.

— G_4 possède un sommet de degré 3 : il n'appartient donc pas à $E_5(2)$.

Les deux graphes cherchés sont donc

$$\boxed{G_1 \text{ et } G_3}.$$

3. Soit $G \in E_n(d)$ et soit s un sommet fixé de G.

a) Par définition, d est le degré maximal du graphe. Le sommet s possède donc au plus d voisins.

b) Comme le diamètre vaut 2, tout sommet distinct de s est soit à distance 1 de s, soit à distance 2 de s.

Il y a au plus d sommets à distance 1 de s. Chacun de ces voisins possède au plus $d-1$ voisins autres que s, donc le nombre de sommets à distance 2 de s est au plus $d(d-1)$.

Ainsi, le nombre de sommets distincts de s est au plus

$$d + d(d-1).$$

Autrement dit,

$$n - 1 \leq d + d(d-1) = d^2.$$

c) On en déduit

$$\boxed{n \leq d^2 + 1}.$$

Dans toute la suite, G est un graphe de Moore :

$$n = d^2 + 1.$$

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sa matrice d'adjacence et $B = A^2 = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Partie 3 – Étude de la matrice d'adjacence

4. Le graphe est non orienté. Ainsi, s'il existe une arête entre i et j, elle relie aussi j à i. Donc

$$a_{i,j} = a_{j,i}$$

pour tout (i, j). La matrice A est donc symétrique.

5. a) Le graphe est simple : il n'y a pas d'arêtes multiples. Entre deux sommets distincts, il y a donc soit zéro arête, soit une arête. Ainsi

$$\boxed{a_{i,j} \in \{0, 1\}}.$$

b) Le graphe est sans boucle, donc aucun sommet n'est relié à lui-même. Ainsi

$$\boxed{a_{i,i} = 0 \qquad (1 \leq i \leq n)}.$$

6. a) Par définition du produit matriciel,

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j}.$$

Comme A est symétrique, $a_{k,j} = a_{j,k}$. Donc

$$\boxed{b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k}}.$$

b) Pour $i = j$,

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2.$$

Comme $a_{i,k} \in \{0, 1\}$, on a $a_{i,k}^2 = a_{i,k}$. Donc

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.$$

Cette somme est le degré du sommet i. Or, dans un graphe de Moore, chaque sommet est de degré d d'après l'énoncé. Donc

$$\boxed{b_{i,i} = d}.$$

7. a) Soient $i \neq j$.

Si $a_{i,j} = 1$, alors i et j sont reliés par une chaîne de longueur 1. L'énoncé admet qu'il existe exactement une chaîne de longueur 1 ou 2 entre deux sommets distincts. Il ne peut donc pas exister de chaîne de longueur 2 entre i et j, d'où $b_{i,j} = 0$.

Si $a_{i,j} = 0$, alors i et j ne sont pas voisins. Comme le diamètre vaut 2 et que le graphe est connexe, ils sont reliés par une chaîne de longueur 2. L'unicité admise donne $b_{i,j} = 1$.

Donc

$$\boxed{\text{pour } i \neq j, \quad \begin{cases} a_{i,j} = 0,\ b_{i,j} = 1, \\ \text{ou} \quad a_{i,j} = 1,\ b_{i,j} = 0. \end{cases}}$$

b) Dans les deux cas précédents,

$$\boxed{a_{i,j} + b_{i,j} = 1 \qquad (i \neq j)}.$$

c) Pour tout i,

$$b_{i,i} + a_{i,i} = d + 0 = d.$$

Donc

$$\boxed{b_{i,i} + a_{i,i} = d}.$$

8. La matrice $A^2 + A = B + A$ a pour coefficients diagonaux d et pour coefficients hors diagonale 1. La matrice $(d-1)I_n + J_n$ a elle aussi pour coefficients diagonaux

$$(d-1) + 1 = d$$

et pour coefficients hors diagonale 1. Donc

$$\boxed{A^2 + A = (d-1)I_n + J_n}.$$

Partie 4 – Valeurs propres possibles de A

9. La matrice A est réelle symétrique. Elle est donc diagonalisable.

10. a) Le produit AU a pour i-ième coefficient

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.$$

Cette somme est le degré du sommet i, donc elle vaut d. Ainsi

$$AU = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} = dU.$$

Donc

$$\boxed{AU = dU}.$$

b) Comme $U \neq 0$, l'égalité $AU = dU$ montre que

$$\boxed{d \text{ est valeur propre de } A}.$$

11. Soit λ une valeur propre de A et soit $X \neq 0$ un vecteur propre associé :

$$AX = \lambda X.$$

a) En appliquant à X la relation

$$A^2 + A = (d-1)I_n + J_n,$$

on obtient

$$A^2X + AX = (d-1)X + J_nX.$$

Or $AX = \lambda X$ et $A^2X = \lambda^2 X$. Donc

$$(\lambda^2 + \lambda)X = (d-1)X + J_nX.$$

Ainsi

$$\boxed{J_nX = (\lambda^2 + \lambda - d + 1)X}.$$

b) Si $\lambda = d$, alors
$$\lambda^2 + \lambda - d + 1 = d^2 + d - d + 1 = d^2 + 1 = n.$$
D'après la question précédente,
$$J_n X = nX.$$
La partie 1 donne alors
$$X \in \mathrm{Vect}(U).$$
Donc l'espace propre de A associé à d est inclus dans $\mathrm{Vect}(U)$. Comme U est lui-même vecteur propre de A associé à d, on obtient
$$\boxed{E_d(A) = \mathrm{Vect}(U)}$$
et donc
$$\boxed{\dim E_d(A) = 1}.$$

c) On résout
$$\lambda^2 + \lambda - d + 1 = n.$$
Comme $n = d^2 + 1$, cela devient
$$\lambda^2 + \lambda - d - d^2 = 0.$$
Or
$$\lambda^2 + \lambda - d - d^2 = (\lambda - d)(\lambda + d + 1).$$
Les solutions sont donc
$$\lambda = d \qquad \text{ou} \qquad \lambda = -d - 1.$$
Si $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = n$, alors $J_n X = nX$, donc $X \in \mathrm{Vect}(U)$. Mais tout vecteur non nul de $\mathrm{Vect}(U)$ est vecteur propre de A pour la valeur propre d, puisque $AU = dU$. Ainsi la seule solution effectivement valeur propre est
$$\boxed{\lambda = d}.$$

d) Si $\lambda \neq d$, alors le réel $\lambda^2 + \lambda - d + 1$ est une valeur propre de J_n d'après 11.a. Les seules valeurs propres possibles de J_n sont 0 et n. Le cas n conduirait, d'après 11.c, à $\lambda = d$, exclu ici. Donc
$$\boxed{\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0}.$$

e) Les autres valeurs propres possibles de A sont donc les solutions de
$$\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0.$$
Son discriminant est
$$\Delta = 1 - 4(1 - d) = 4d - 3.$$
Ainsi
$$\boxed{b = \frac{-1 + \sqrt{4d-3}}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{c = \frac{-1 - \sqrt{4d-3}}{2}}.$$

Partie 5 – Confirmation des valeurs propres de A

On note Δ une matrice diagonale semblable à A.

12. **a)** Soient M et N deux matrices semblables. Il existe une matrice inversible P telle que

$$N = P^{-1}MP.$$

Alors, en utilisant l'identité admise $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$,

$$\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}(MPP^{-1}) = \mathrm{Tr}(M).$$

Donc deux matrices semblables ont la même trace.

b) Comme A est diagonalisable, sa matrice diagonale semblable Δ contient sur sa diagonale les valeurs propres de A, répétées avec leurs multiplicités.

Si ni b ni c n'était valeur propre, alors la seule valeur propre de A serait d. Comme A est diagonalisable, l'espace propre associé à d serait alors de dimension n. Cela contredit la question 11.b, où l'on a montré que cet espace propre est de dimension 1.

Donc au moins l'un des deux réels b ou c est effectivement valeur propre de A.

13. La matrice Δ est diagonale et semblable à A. Ses coefficients diagonaux sont donc des valeurs propres de A. D'après la partie 4, les seules valeurs propres possibles sont d, b et c.

De plus, l'espace propre associé à d est de dimension 1. Comme A est diagonalisable, la multiplicité de la valeur propre d est égale à la dimension de son espace propre. Donc d apparaît exactement une fois sur la diagonale de Δ.

Les autres coefficients diagonaux sont donc égaux à b ou à c. Ainsi

$$\boxed{\Delta \text{ comporte un seul coefficient diagonal égal à } d, \text{ les autres étant égaux à } b \text{ ou } c.}$$

14. Si $d = 1$, alors le graphe de Moore aurait

$$n = d^2 + 1 = 2$$

sommets. Le seul graphe simple connexe à deux sommets est formé d'une unique arête, et son diamètre vaut 1, et non 2.

Donc

$$\boxed{d \neq 1}.$$

15. On suppose que b est la seule valeur propre de A autre que d.

a) D'après la question 13, la diagonale de Δ contient une fois d et $n-1$ fois b. Donc

$$\mathrm{Tr}(\Delta) = d + (n-1)b.$$

Or Δ est semblable à A, donc $\mathrm{Tr}(\Delta) = \mathrm{Tr}(A)$. Comme A est la matrice d'adjacence d'un graphe sans boucle, ses coefficients diagonaux sont tous nuls. Ainsi

$$\mathrm{Tr}(A) = 0.$$

Donc

$$\boxed{d + (n-1)b = 0}.$$

b) Comme $n = d^2 + 1$, on a $n - 1 = d^2$. L'égalité précédente donne

$$d + d^2 b = 0.$$

Comme $d \neq 0$,

$$1 + db = 0.$$

Or

$$b = \frac{-1+\sqrt{4d-3}}{2}.$$

Donc

$$1 + d\frac{-1+\sqrt{4d-3}}{2} = 0.$$

En multipliant par 2,

$$2 - d + d\sqrt{4d-3} = 0.$$

Ainsi

$$\boxed{d - 2 = d\sqrt{4d-3}}.$$

c) En élevant au carré l'égalité précédente,

$$(d-2)^2 = d^2(4d-3).$$

Donc

$$d^2 - 4d + 4 = 4d^3 - 3d^2.$$

Ainsi

$$4d^3 - 4d^2 + 4d - 4 = 0,$$

c'est-à-dire

$$d^3 - d^2 + d - 1 = 0.$$

Or

$$d^3 - d^2 + d - 1 = (d-1)(d^2+1).$$

Comme $d^2 + 1 > 0$, on obtient nécessairement

$$d = 1.$$

C'est contradictoire avec la question 14. La supposition selon laquelle b serait la seule valeur propre autre que d est donc impossible.

On en déduit en particulier que c est effectivement valeur propre de A.

Fin de la correction.