

Correction – BCE 2026 – Mathématiques appliquées – ECG

Exercice 1

Partie A – Étude d'une fonction de deux variables

On considère

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + xy > 0\}, \quad f(x, y) = x + \ln(1 + xy).$$

1. a) Pour $(x, y) \in D$, la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + \frac{y}{1 + xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{1 + xy}.$$

Donc

$$\nabla f(x, y) = \left(1 + \frac{y}{1 + xy}, \frac{x}{1 + xy} \right).$$

- b) Un point critique (x_0, y_0) vérifie

$$\frac{x_0}{1 + x_0 y_0} = 0 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{y_0}{1 + x_0 y_0} = 0.$$

Comme $1 + x_0 y_0 > 0$, la première équation donne $x_0 = 0$. La seconde devient alors

$$1 + y_0 = 0,$$

donc $y_0 = -1$.

Ainsi, **le seul point critique** est

$$(0, -1).$$

- c) Pour $(x, y) \in D$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{y^2}{(1 + xy)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{x^2}{(1 + xy)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{(1 + xy)^2}.$$

La matrice hessienne est donc

$$H_f(x, y) = \frac{1}{(1 + xy)^2} \begin{pmatrix} -y^2 & 1 \\ 1 & -x^2 \end{pmatrix}.$$

Au point $(0, -1)$,

$$H_f(0, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut

$$\det H_f(0, -1) = -1 < 0.$$

La forme quadratique associée est donc indéfinie : le point $(0, -1)$ est un **point selle**.

2. Pour $k \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau L_k est l'ensemble des $(x, y) \in D$ tels que

$$f(x, y) = k \iff x + \ln(1 + xy) = k.$$

En exponentiant,

$$1 + xy = e^{k-x}.$$

Si $x \neq 0$, on obtient

$$y = \frac{e^{k-x} - 1}{x}.$$

Ainsi, pour $x \neq 0$,

$$\boxed{f(x, y) = k \iff y = \frac{e^{k-x} - 1}{x}.$$

Le programme Python trace donc les courbes

$$y = \frac{e^{k-x} - 1}{x}$$

pour les différentes valeurs de k contenues dans la liste K . Les courbes correspondant à des valeurs de k positives sont situées plus haut à droite, tandis que celles correspondant à des valeurs négatives sont plus basses.

Partie B – Étude de la ligne de niveau zéro

On considère désormais

$$g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^*).$$

3. Pour $x > 0$, on a $e^{-x} - 1 < 0$, donc $g(x) < 0$. Pour $x < 0$, on a $e^{-x} - 1 > 0$ et $x < 0$, donc encore $g(x) < 0$. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) < 0.}$$

4. Comme $e^{-x} = 1 - x + o(x)$ quand $x \rightarrow 0$, on obtient

$$g(x) = \frac{-x + o(x)}{x} \rightarrow -1.$$

La fonction g admet donc un prolongement continu en 0, défini par

$$\boxed{g(0) = -1.}$$

On note encore g ce prolongement.

5. a) Puisque

$$g(x) = -1 + \frac{x}{2} + o(x) \quad (x \rightarrow 0),$$

on obtient

$$\boxed{g'(0) = \frac{1}{2}.$$

- b) Pour $x \neq 0$,

$$g'(x) = \frac{-xe^{-x} - (e^{-x} - 1)}{x^2} = \frac{1 - (x+1)e^{-x}}{x^2}.$$

Or

$$1 - (x+1)e^{-x} = e^{-x}(e^x - x - 1).$$

La fonction $\varphi(x) = e^x - x - 1$ vérifie $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(x) = e^x - 1$, donc $\varphi(x) \geq 0$ pour tout x , avec égalité seulement en 0. Il en résulte que $g'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. De plus $g'(0) = 1/2 > 0$. Ainsi g est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Pour montrer que $g'(x) \leq 1/2$, on pose

$$h(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + (x+1)e^{-x}.$$

Alors $h(0) = 0$ et

$$h'(x) = x - xe^{-x} = x(1 - e^{-x}).$$

Donc $h'(x) \geq 0$ pour tout x , d'où $h(x) \geq 0$ pour tout x . Cela équivaut à

$$1 - (x+1)e^{-x} \leq \frac{x^2}{2},$$

soit

$$\boxed{g'(x) \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

c) Comme g est croissante, avec

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

et $g(0) = -1$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	-1	0

Plus précisément, g croît de $-\infty$ vers 0 , en passant par la valeur -1 en 0 .

6. a) Le domaine D est délimité par l'hyperbole d'équation

$$1 + xy = 0 \iff y = -\frac{1}{x}.$$

Pour $x > 0$, on a $y > -1/x$; pour $x < 0$, on a $y < -1/x$.

La ligne de niveau 0 de f est la courbe d'équation

$$y = g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}.$$

b) Comme

$$f(x, y) = 0 \iff 1 + xy = e^{-x},$$

on obtient, pour $x \neq 0$:

$$f(x, y) \geq 0 \iff \begin{cases} y \geq g(x) & \text{si } x > 0, \\ y \leq g(x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi, dans le domaine D :

- pour $x > 0$, la zone **au-dessus** de la courbe $y = g(x)$ correspond à $f \geq 0$, et la zone comprise entre $y = -1/x$ et $y = g(x)$ correspond à $f < 0$;
- pour $x < 0$, la zone **au-dessous** de la courbe $y = g(x)$ correspond à $f \geq 0$, et la zone comprise entre $y = g(x)$ et $y = -1/x$ correspond à $f < 0$.

Partie C – Aire de la surface délimitée par la ligne de niveau zéro

Pour $x \geq 0$, on pose

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

8. La fonction prolongée g est continue sur \mathbb{R}_+ , donc par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\boxed{G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+) \quad \text{et} \quad G'(x) = g(x).}$$

9. Pour $x > 0$,

$$G(x) = G(1) + \int_1^x g(t) dt.$$

Or

$$g(t) = \frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t},$$

donc

$$\boxed{G(x) = G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln x.}$$

10. Comme l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

converge, le terme intégral reste borné lorsque $x \rightarrow +\infty$. Par conséquent,

$$\boxed{G(x) \sim -\ln x \quad (x \rightarrow +\infty).}$$

11. Comme G est dérivable en 0 et $G'(0) = g(0) = -1$, on a

$$G(x) = G(0) - x + o(x) = -x + o(x) \quad (x \rightarrow 0^+),$$

puisque $G(0) = 0$. En repartant de la formule de la question 9,

$$\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = G(x) - G(1) + \ln x,$$

soit encore

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = -G(x) + G(1) - \ln x.$$

Donc, quand $x \rightarrow 0^+$,

$$\boxed{\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = -\ln x + G(1) + x + o(x).}$$

La quantité

$$\int_0^1 -g(t) dt = -G(1)$$

représente l'aire comprise entre la courbe $y = g(x)$, l'axe des abscisses, et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 2

On note $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on pose

$$\text{tr}(M) = a + d, \quad \det(M) = ad - bc.$$

On définit l'application u par

$$u(M) = \text{tr}(M)I_2 - M.$$

Partie A – Un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$

1. L'application trace est linéaire, et l'application $M \mapsto \text{tr}(M)I_2$ est donc linéaire. Comme $M \mapsto -M$ est linéaire, u est linéaire.

2. Pour

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on a

$$u(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

a) u est bien un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

b) On calcule

$$\text{tr}(u(M)) = d + a = \text{tr}(M).$$

Donc

$$u^2(M) = \text{tr}(u(M))I_2 - u(M) = \text{tr}(M)I_2 - u(M) = M.$$

Ainsi

$$\boxed{u^2 = \text{Id}_{M_2(\mathbb{R})}}.$$

c) Si $u(M) = M$, alors $\text{tr}(M)I_2 = 2M$, donc M est une matrice scalaire. Réciproquement, toute matrice scalaire vérifie cette propriété. Ainsi

$$E_1 = \{\lambda I_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(I_2).$$

Si $u(M) = -M$, alors $\text{tr}(M)I_2 = 0$, donc $\text{tr}(M) = 0$. Réciproquement, toute matrice de trace nulle vérifie $u(M) = -M$. Donc

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

3. Dans la base canonique

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}),$$

les coordonnées de $u(a, b, c, d)$ sont $(d, -b, -c, a)$. Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $u^2 = \text{Id}$, on a aussitôt

$$A^2 = I_4, \quad A^{-1} = A.$$

Les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1 , et d'après ce qui précède,

$$\dim E_1 = 1, \quad \dim E_{-1} = 3.$$

Une base de sous-espaces propres est donc par exemple

$$E_1 = \text{Vect}(I_2), \quad E_{-1} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Partie B – Deux formules d'inversion

4. Pour

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad u(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

on calcule

$$M\nu(M) = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \det(M)I_2.$$

Donc

$$\boxed{M\nu(M) = \nu(M)M = \det(M)I_2.}$$

5. a) Si $\det(M) \neq 0$, alors

$$M \left(\frac{1}{\det(M)} \nu(M) \right) = I_2,$$

donc M est inversible et

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \nu(M).}$$

Réciproquement, si M est inversible, alors nécessairement $\det(M) \neq 0$.

b) Si M et N sont inversibles, alors

$$(M + N)^{-1} = \frac{1}{\det(M + N)} \nu(M + N).$$

Or $u = \nu$ est linéaire, donc

$$\nu(M + N) = \nu(M) + \nu(N) = \det(M)M^{-1} + \det(N)N^{-1}.$$

Ainsi

$$\boxed{(M + N)^{-1} = \frac{\det(M)}{\det(M + N)} M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M + N)} N^{-1}.}$$

Partie C – Polynômes de Tchebychev et traces

On considère les polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définis par

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \quad P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X) \quad (n \geq 0).$$

6. a) On obtient immédiatement

$$P_2(X) = X, \quad P_3(X) = X^2 - 1.$$

b) Par récurrence, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\boxed{\deg(P_n) = n - 1.}$$

En effet, si $\deg(P_n) = n - 1$ et $\deg(P_{n+1}) = n$, alors

$$P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X)$$

a pour terme dominant celui de $XP_{n+1}(X)$, donc est de degré $n + 1$.

7. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = P_n(\text{tr}(M)).$$

a) D'après la question 4, comme $\det(M) = 1$,

$$M^2 - \operatorname{tr}(M)M + I_2 = 0.$$

On montre alors par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\boxed{M^n = u_n M - u_{n-1} I_2.}$$

En effet, pour $n = 1$, cela donne

$$M = P_1(\operatorname{tr}(M))M - P_0(\operatorname{tr}(M))I_2 = M.$$

Supposons la formule vraie aux rangs n et $n - 1$. Alors

$$M^{n+1} = M(u_n M - u_{n-1} I_2) = u_n M^2 - u_{n-1} M.$$

En utilisant $M^2 = \operatorname{tr}(M)M - I_2$,

$$M^{n+1} = (\operatorname{tr}(M)u_n - u_{n-1})M - u_n I_2.$$

Or, par définition des u_n ,

$$u_{n+1} = \operatorname{tr}(M)u_n - u_{n-1}.$$

Donc

$$M^{n+1} = u_{n+1}M - u_n I_2,$$

ce qui achève la récurrence.

b) En prenant la trace dans l'identité précédente, pour tout $n \geq 1$,

$$\operatorname{tr}(M^n) = u_n \operatorname{tr}(M) - 2u_{n-1}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\operatorname{tr}(M^n) = u_n \operatorname{tr}(M) - 2u_{n-1}.}$$

c) Il existe donc un polynôme Q_n tel que

$$\operatorname{tr}(M^n) = Q_n(\operatorname{tr}(M)).$$

On peut prendre

$$\boxed{Q_n(X) = X P_n(X) - 2P_{n-1}(X).}$$

8. a) La fonction Python calculant $P_n(x)$ peut s'écrire ainsi :

```
def P(n,x):
    if n == 0:
        return 0
    if n == 1:
        return 1
    p0, p1 = 0, 1
    for k in range(1,n):
        p0, p1 = p1, x*p1 - p0
    return p1
```

b) Pour calculer M^n quand $\det(M) = 1$, on utilise la formule précédente :

```
def puissance(n,M):
    import numpy as np
    if n == 0:
        return np.eye(2)
    u_n = P(n, np.trace(M))
    u_nm1 = P(n-1, np.trace(M))
    return u_n*M - u_nm1*np.eye(2)
```

Exercice 3

On note $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

Partie A – Rang moyen du premier double pile

1. On considère l'expérience consistant à lancer une pièce jusqu'à obtenir un premier *pile*, puis à effectuer encore un lancer. Si N désigne le nombre total de lancers, alors pour $n \geq 2$,

$$[N = n] = \{F_1 \cap \dots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1}\}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(N = n) = q^{n-2}p \quad (n \geq 2).$$

C'est la loi d'une variable de la forme $N = 1 + G$, où G suit une loi géométrique de paramètre p sur \mathbb{N}^* . Par conséquent,

$$\mathbb{E}(N) = 1 + \frac{1}{p}, \quad \mathbb{V}(N) = \frac{q}{p^2}.$$

2. On note S l'événement : « la succession de lancers se termine par un double pile ».

a) Pour $n \geq 2$,

$$[N = n] \cap S = \{F_1 \cap \dots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n\},$$

d'où

$$\mathbb{P}(N = n \cap S) = q^{n-2}p^2.$$

b) En sommant,

$$\mathbb{P}(S) = \sum_{n=2}^{+\infty} q^{n-2}p^2 = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = p.$$

De plus, pour $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(N = n \mid S) = \frac{q^{n-2}p^2}{p} = q^{n-2}p = \mathbb{P}(N = n).$$

Ainsi, conditionnellement à S , la variable N a la même loi que sans condition.

3. On répète indépendamment l'expérience précédente jusqu'à la réalisation de S . On note R le nombre de répétitions nécessaires. Comme chaque répétition réalise S avec probabilité p , on a

$$\mathbb{P}(R = r) = q^{r-1}p \quad (r \geq 1).$$

Donc

$$R \sim \mathcal{G}(p).$$

4. Soit $r \geq 1$.

a) Conditionnellement à $(R = r)$, la dernière répétition est une répétition réussie. Ainsi, pour $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(N_r = n \mid R = r) = \mathbb{P}(N = n \mid S) = q^{n-2}p.$$

b) On retrouve donc la même loi :

$$\mathbb{P}(N_r = n \mid R = r) = q^{n-2}p \quad (n \geq 2).$$

c) Son espérance vaut alors

$$\mathbb{E}(N_r \mid R = r) = 1 + \frac{1}{p} = \frac{1+p}{p}.$$

5. Si T désigne le nombre total de lancers nécessaires pour obtenir le premier double pile, alors presque sûrement,

$$T = \sum_{i=1}^R N_i.$$

6. Pour tout entier $k \geq 2$, l'événement $[T = k]$ est réunion disjointe des événements

$$[R = n] \cap [N_1 + \dots + N_n = k], \quad 1 \leq n \leq k - 1.$$

On en déduit que T est bien définie presque sûrement et que, pour tout $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}(T = k) = \sum_{n=1}^{k-1} \mathbb{P}(R = n, N_1 + \dots + N_n = k).$$

7. Pour calculer l'espérance, on écrit

$$T = \sum_{i \geq 1} N_i \mathbf{1}_{R \geq i}.$$

Or N_i est indépendante de l'événement $[R \geq i]$ (qui ne dépend que des $i - 1$ premières répétitions), donc

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}(N_i) \mathbb{P}(R \geq i).$$

Comme $\mathbb{E}(N_i) = \mathbb{E}(N) = 1 + 1/p$ et $\mathbb{P}(R \geq i) = q^{i-1}$,

$$\mathbb{E}(T) = \left(1 + \frac{1}{p}\right) \sum_{i \geq 1} q^{i-1} = \left(1 + \frac{1}{p}\right) \frac{1}{p}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1+p}{p^2}.$$

Pour $p = 1/2$, on retrouve $\mathbb{E}(T) = 6$.

Partie B – Simulation informatique

8. La fonction `Exp_1(p)` doit simuler une répétition de la première expérience :

```
def Exp_1(p):
    N = 1
    while np.random.random() > p:
        N = N + 1
    if np.random.random() <= p:
        S = 1
    else:
        S = 0
    return N+1, S
```

9. La fonction simulant la deuxième expérience peut être :

```
def Exp_2(p):
    R = 0
    T = 0
    S = 0
    while S == 0:
        N, S = Exp_1(p)
        R = R + 1
        T = T + N
    return R, T
```

10. Une fonction renvoyant la fréquence d'apparition de l'événement ($T \leq 2p$) sur n simulations est :

```
def frequence_T(p,n):
    c = 0
    for k in range(n):
        R, T = Exp_2(p)
        if T <= 2/p:
            c = c + 1
    return c/n
```

L'instruction fournie donne une estimation numérique de cette probabilité.

Partie C – Nombre de doubles piles

On considère maintenant une succession infinie de lancers indépendants. Pour $n \geq 1$, on note Y_n l'indicatrice de l'événement : « les n -ième et $(n + 1)$ -ième lancers donnent pile ».

11. Comme Y_n est une indicatrice,

$$\mathbb{E}(Y_n) = p^2, \quad \mathbb{V}(Y_n) = p^2(1 - p^2).$$

12. Soient $n, m \geq 1$.

- a) Si $|n - m| \geq 2$, alors Y_n et Y_m dépendent de familles de lancers disjointes ; elles sont donc indépendantes.
 b) Si $m = n + 1$, alors

$$Y_n Y_{n+1} = 1$$

ssi les lancers $n, n + 1$ et $n + 2$ donnent tous pile. Donc

$$\mathbb{E}(Y_n Y_{n+1}) = p^3,$$

et ainsi

$$\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1 - p).$$

De même,

$$\text{Cov}(Y_n, Y_{n-1}) = p^3(1 - p).$$

13. Pour $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

- a) Par linéarité,

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k) = np^2.$$

Et

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(Y_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Seules subsistent les covariances pour $j = i + 1$, donc

$$\mathbb{V}(S_n) = np^2(1 - p^2) + 2(n - 1)p^3(1 - p).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(S_n) = np^2, \quad \mathbb{V}(S_n) = np^2(1 - p^2) + 2(n - 1)p^3(1 - p).$$

b) On en déduit

$$\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \frac{p^2(1-p^2)}{n} + \frac{2(n-1)}{n^2}p^3(1-p).$$

Comme $1-p^2 \leq 1$ et $\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, on obtient

$$\boxed{\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) \leq \frac{3p^2}{n}.}$$

14. Soit $\varepsilon > 0$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n/n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{3p^2}{\varepsilon^2 n}.$$

Le majorant tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) = 0.}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} p^2.}$$