

EXCELLENCE MATHS

Correction complète

EDHEC 2026 – Mathématiques approfondies

Filière ECG – voie générale

Objectif de la correction. Cette correction est rédigée comme une copie modèle : les arguments essentiels sont explicités, les résultats sont encadrés, et les questions Python sont données sous une forme directement exploitable.

Table des matières

1	Exercice 1	3
2	Exercice 2	7
3	Exercice 3	13
4	Problème	18

1 Exercice 1

On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$, et l'on pose

$$Y_1 = \ln(X_1), \quad Y_2 = \ln(X_2), \quad Z = X_1 X_2.$$

1) Simulation de Z

Une simulation de X_1 et X_2 se fait à l'aide de deux appels indépendants à `rd.random()`, qui renvoie un réel selon la loi uniforme sur $[0, 1[$. La différence entre $[0, 1[$ et $]0, 1]$ est négligeable ici, car les points isolés sont de probabilité nulle.

```
def simulZ():
    X1 = rd.random()
    X2 = rd.random()
    return X1 * X2
```

2) Espérance et variance de Z

Comme $0 \leq X_1 \leq 1$ et $0 \leq X_2 \leq 1$, on a $0 \leq Z \leq 1$. Ainsi Z est bornée, donc elle admet une espérance et une variance.

Par indépendance de X_1 et X_2 ,

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2).$$

Or, si X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$. Donc

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

De même,

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X_1^2 X_2^2) = \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2^2).$$

Pour $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

d'où

$$\mathbb{E}(Z^2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Ainsi

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{16 - 9}{144} = \frac{7}{144}.$$

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{4}$$

et

$$\mathbb{V}(Z) = \frac{7}{144}.$$

3) Loi commune de Y_1 et Y_2

a) Fonction de répartition

Soit $Y = \ln(X)$ avec $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$. Pour tout réel x ,

$$F(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(\ln X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq e^x),$$

car la fonction logarithme est croissante.

Deux cas se présentent.

Si $x < 0$, alors $0 < e^x < 1$, donc

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq e^x) = e^x.$$

Si $x \geq 0$, alors $e^x \geq 1$, donc, puisque $X \leq 1$ presque sûrement,

$$F(x) = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

b) Densité commune

La fonction F est continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en 0. Une densité de Y est donc donnée par

$$f(x) = F'(x)$$

en tout point où F est dérivable. Ainsi, on peut choisir

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

La valeur en 0 n'a aucune incidence pour une densité.

4) Loi de $Y_1 + Y_2$ puis de Z

a) Densité de $Y_1 + Y_2$

Les variables Y_1 et Y_2 sont indépendantes, car X_1 et X_2 le sont et $Y_i = \ln(X_i)$. On peut donc utiliser le produit de convolution des densités.

Pour tout réel x ,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt.$$

Comme $f(t) \neq 0$ seulement si $t \leq 0$, et $f(x-t) \neq 0$ seulement si $x-t \leq 0$, c'est-à-dire $t \geq x$, l'intégrale porte sur $[x, 0]$ lorsque $x \leq 0$, et elle est nulle lorsque $x > 0$.

Si $x \leq 0$, alors

$$h(x) = \int_x^0 e^t e^{x-t} dt = \int_x^0 e^x dt = (-x)e^x.$$

Si $x > 0$, alors $h(x) = 0$.

Ainsi

$$h(x) = \begin{cases} -xe^x, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Vérifions aussi qu'il s'agit bien d'une densité. Elle est positive, car si $x \leq 0$, alors $-x \geq 0$ et $e^x > 0$. Enfin,

$$\int_{-\infty}^0 -xe^x dx = [(1-x)e^x]_{-\infty}^0 = 1.$$

Donc h est bien une densité de $Y_1 + Y_2$.

b) Fonction de répartition de $Y_1 + Y_2$

Notons H la fonction de répartition de $Y_1 + Y_2$.

Si $x < 0$,

$$H(x) = \int_{-\infty}^x -te^t dt = \left[(1-t)e^t \right]_{-\infty}^x = (1-x)e^x.$$

Si $x \geq 0$, alors $Y_1 + Y_2 \leq 0$ presque sûrement, donc $H(x) = 1$.

$$H(x) = \begin{cases} (1-x)e^x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

c) Fonction de répartition et densité de Z

Comme

$$Z = X_1 X_2 = e^{Y_1} e^{Y_2} = e^{Y_1 + Y_2},$$

on obtient, pour tout réel x ,

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x).$$

Si $x \leq 0$, alors $F_Z(x) = 0$, car $Z > 0$ presque sûrement.

Si $0 < x \leq 1$, alors, puisque l'exponentielle est croissante,

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(e^{Y_1 + Y_2} \leq x) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq \ln x) = H(\ln x).$$

Comme $\ln x \leq 0$, on trouve

$$F_Z(x) = (1 - \ln x)e^{\ln x} = x(1 - \ln x).$$

Si $x > 1$, alors $F_Z(x) = 1$.

Donc

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x(1 - \ln x), & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Sur $]0, 1[$,

$$F'_Z(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x.$$

Ainsi une densité de Z est

$$f_Z(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

5) Calcul d'intégrales et moments de Z

a) Calcul de $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, intégrons par parties sur $[\varepsilon, 1]$ avec

$$u(x) = \ln x, \quad v'(x) = x^n.$$

Alors $u'(x) = 1/x$ et $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Ainsi

$$\int_{\varepsilon}^1 x^n \ln(x) dx = \left[\frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{1}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 x^n dx.$$

Or $\varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, donc le crochet tend vers 0. De plus,

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Par passage à la limite,

$$\boxed{\int_0^1 x^n \ln(x) dx = -\frac{1}{(n+1)^2}}.$$

L'intégrale converge donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Retrouver $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$

À l'aide de la densité f_Z , on obtient

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^1 x(-\ln x) dx = -\int_0^1 x \ln x dx = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

De même,

$$\mathbb{E}(Z^2) = \int_0^1 x^2(-\ln x) dx = -\int_0^1 x^2 \ln x dx = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}.$$

Donc

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}.$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(Z) = \frac{7}{144}}.$$

2 Exercice 2

On définit les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ par

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 2,$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}}.$$

1) Bonne définition des suites

Montrons par récurrence que $u_n \in [0, 1]$ et que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 2$.

On a $u_1 = 0 \in [0, 1]$. Supposons $u_n \in [0, 1]$. Alors

$$\frac{1+u_n}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right],$$

donc

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right] \subset]0, 1].$$

Ainsi u_{n+1} est bien défini et strictement positif.

Par conséquent, à chaque étape, $u_{n+1} \neq 0$, donc le quotient v_n/u_{n+1} est bien défini. Les deux suites sont donc parfaitement définies.

2) Fonction Python

```
def suite_v(n):
    u = 0
    v = 2
    for k in range(2, n+1):
        u = np.sqrt((1+u)/2)
        v = v/u
    return v
```

Pour $n = 1$, la boucle ne s'exécute pas et la fonction renvoie bien $v_1 = 2$.

3) Expression trigonométrique de u_n et de v_n

a) Existence et unicité de α_n

Pour tout $n \geq 1$, on a montré que $u_n \in [0, 1]$. Or la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$. Il existe donc un unique réel $\alpha_n \in [0, \pi/2]$ tel que

$$u_n = \cos(\alpha_n).$$

Il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $[0, \pi/2]$ telle que $u_n = \cos(\alpha_n)$ pour tout $n \geq 1$.

b) Expression de α_n

Comme $u_1 = 0$, on a

$$\cos(\alpha_1) = 0,$$

avec $\alpha_1 \in [0, \pi/2]$, donc

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Supposons $u_n = \cos(\alpha_n)$. Alors

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha_n)}{2}}.$$

À l'aide de la formule

$$\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1,$$

on obtient

$$\frac{1 + \cos(\alpha_n)}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha_n}{2}\right).$$

Comme $\alpha_n/2 \in [0, \pi/4]$, le cosinus est positif, donc

$$u_{n+1} = \cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right).$$

Par unicité de α_{n+1} ,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2}.$$

La suite (α_n) est donc géométrique de raison $1/2$:

$$\boxed{\alpha_n = \frac{\pi}{2^n}.$$

c) Expression de v_n et limite

D'après la relation $v_{n+1} = v_n/u_{n+1}$, on a, pour $n \geq 2$,

$$v_n = \frac{2}{u_2 u_3 \cdots u_n}.$$

Or

$$u_k = \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right).$$

On utilise alors la formule

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a).$$

En l'appliquant successivement, on obtient

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right).$$

Comme $\sin(\pi/2) = 1$,

$$\prod_{k=2}^n u_k = \frac{1}{2^{n-1} \sin(\pi/2^n)}.$$

Ainsi

$$v_n = 2 \times 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right),$$

donc

$$\boxed{v_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Enfin, en posant $x_n = \frac{\pi}{2^n}$, on a $x_n \rightarrow 0$ et

$$v_n = 2^n \sin(x_n) = \pi \frac{\sin(x_n)}{x_n}.$$

Comme $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \pi.$$

4) Développement asymptotique de v_n

On utilise le développement limité donné :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Avec $x = \frac{\pi}{2^n}$,

$$v_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2^n \left(\frac{\pi}{2^n} - \frac{\pi^3}{6 \cdot 2^{3n}} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 2^{5n}} + o\left(\frac{1}{2^{5n}}\right) \right).$$

Donc

$$v_n = \pi - \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

Ainsi

$$a = \pi, \quad b = -\frac{\pi^3}{6}, \quad c = \frac{\pi^5}{120}.$$

5) Accélération de convergence par Richardson

On pose

$$w_n = \frac{4v_{n+1} - v_n}{3}.$$

a) Fonction Python

```
def suite_w(n):
    return (4*suite_v(n+1) - suite_v(n))/3
```

b) Limite de w_n

Puisque $v_n \rightarrow \pi$ et $v_{n+1} \rightarrow \pi$,

$$w_n = \frac{4v_{n+1} - v_n}{3} \rightarrow \frac{4\pi - \pi}{3} = \pi.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \pi.$$

c) Développement asymptotique et quotient des erreurs

D'après la question 4,

$$v_n = \pi + \frac{b}{4^n} + \frac{c}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right),$$

avec

$$b = -\frac{\pi^3}{6}, \quad c = \frac{\pi^5}{120}.$$

Alors

$$v_{n+1} = \pi + \frac{b}{4^{n+1}} + \frac{c}{4^{2n+2}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

Donc

$$4v_{n+1} - v_n = 3\pi + \left(\frac{4b}{4^{n+1}} - \frac{b}{4^n}\right) + \left(\frac{4c}{4^{2n+2}} - \frac{c}{4^{2n}}\right) + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

Le terme en 4^{-n} disparaît, car

$$\frac{4b}{4^{n+1}} = \frac{b}{4^n}.$$

De plus,

$$\frac{4c}{4^{2n+2}} - \frac{c}{4^{2n}} = \frac{c}{4 \cdot 4^{2n}} - \frac{c}{4^{2n}} = -\frac{3c}{4 \cdot 4^{2n}}.$$

Ainsi, en divisant par 3,

$$w_n = \pi - \frac{c}{4 \cdot 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

Comme $c = \pi^5/120$,

$$w_n = \pi - \frac{\pi^5}{480 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

On en déduit

$$w_n - \pi \sim -\frac{\pi^5}{480 \cdot 4^{2n}}$$

et

$$v_n - \pi \sim -\frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n}.$$

Donc

$$\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi} \sim \frac{\pi^5}{480 \cdot 4^{2n}} \times \frac{6 \cdot 4^n}{\pi^3} = \frac{\pi^2}{80 \cdot 4^n}.$$

$$\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi} \sim \frac{\pi^2}{80 \cdot 4^n}.$$

d) Intérêt de la suite (w_n)

La suite (v_n) vérifie

$$v_n - \pi = O\left(\frac{1}{4^n}\right),$$

tandis que la suite (w_n) vérifie

$$w_n - \pi = O\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

La suite (w_n) converge donc beaucoup plus rapidement vers π . Elle donne une approximation plus précise à rang comparable.

6) Généralisation de Richardson

On suppose

$$x_n = a + bq^n + cr^n + o(r^n),$$

avec $0 < r < q < 1$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

a) Construction de y_n

On veut éliminer le terme principal bq^n . Pour cela, considérons

$$y_n = \frac{x_{n+1} - qx_n}{1 - q}.$$

Alors

$$x_{n+1} = a + bq^{n+1} + cr^{n+1} + o(r^{n+1}),$$

donc

$$x_{n+1} - qx_n = a(1 - q) + c(r - q)r^n + o(r^n).$$

En divisant par $1 - q$,

$$y_n = a + \frac{c(r - q)}{1 - q}r^n + o(r^n).$$

Une suite convenable est

$$y_n = \frac{x_{n+1} - qx_n}{1 - q},$$

et elle vérifie

$$y_n = a + dr^n + o(r^n) \quad \text{avec} \quad d = \frac{c(r - q)}{1 - q}.$$

b) Développement dominant de x_n

Comme $r < q$, on a

$$\left(\frac{r}{q}\right)^n \rightarrow 0.$$

Donc

$$cr^n = o(q^n).$$

De plus, si $\varepsilon_n = o(r^n)$, alors

$$\frac{\varepsilon_n}{q^n} = \frac{\varepsilon_n}{r^n} \left(\frac{r}{q}\right)^n \rightarrow 0.$$

Ainsi $o(r^n) = o(q^n)$, et donc

$$x_n = a + bq^n + o(q^n).$$

c) Comparaison des vitesses de convergence

On a

$$x_n - a \sim bq^n,$$

et, comme $d \neq 0$ puisque $c \neq 0$ et $r \neq q$,

$$y_n - a \sim dr^n.$$

Ainsi

$$\left| \frac{y_n - a}{x_n - a} \right| \sim \left| \frac{d}{b} \right| \left(\frac{r}{q}\right)^n \rightarrow 0.$$

Donc l'erreur de y_n est négligeable devant celle de x_n .

(y_n) converge vers a plus rapidement que (x_n) .

3 Exercice 3

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1

1) Loi, espérance et variance de X_k

a) **Loi de X_k .** Pour tout entier $k \geq 1$, le mobile se place de façon équiprobable sur les points d'abscisses

$$0, 1, \dots, k.$$

Ainsi

$$X_k(\Omega) = \{0, 1, \dots, k\},$$

et, pour tout $j \in \{0, 1, \dots, k\}$,

$$\mathbb{P}(X_k = j) = \frac{1}{k+1}.$$

b) **Espérance et variance.** La variable X_k est finie, donc elle admet une espérance et une variance. On calcule

$$\mathbb{E}(X_k) = \sum_{j=0}^k j \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k}{2}.$$

De plus,

$$\mathbb{E}(X_k^2) = \sum_{j=0}^k j^2 \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k(2k+1)}{6}.$$

Donc

$$\mathbb{V}(X_k) = \mathbb{E}(X_k^2) - \mathbb{E}(X_k)^2 = \frac{k(2k+1)}{6} - \frac{k^2}{4} = \frac{k(k+2)}{12}.$$

$$\mathbb{E}(X_k) = \frac{k}{2}$$

et

$$\mathbb{V}(X_k) = \frac{k(k+2)}{12}.$$

2) Premier retour à l'origine

a) **Événement $(Y = n)$.** Pour $n \geq 1$, l'événement $(Y = n)$ signifie que le mobile n'est pas revenu à l'origine aux instants $1, 2, \dots, n-1$, puis qu'il est revenu à l'origine à l'instant n .

Ainsi

$$(Y = n) = \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k \neq 0) \cap (X_n = 0).$$

Pour $n = 1$, l'intersection vide est l'univers, donc $(Y = 1) = (X_1 = 0)$.

b) **Calcul de $\mathbb{P}(Y = n)$.** Les variables X_k sont mutuellement indépendantes. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k \neq 0) \right) \mathbb{P}(X_n = 0).$$

Or

$$\mathbb{P}(X_k = 0) = \frac{1}{k+1},$$

donc

$$\mathbb{P}(X_k \neq 0) = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

Ainsi

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$

et

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

c) **Valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n)$ et $\mathbb{P}(Y = 0)$.** Pour $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 1.$$

Comme les événements $(Y = 0), (Y = 1), (Y = 2), \dots$ forment un système complet d'événements,

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = 0) = 0.$$

d) **Existence de l'espérance de Y .** La variable Y est positive, donc son espérance existe si et seulement si la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(Y = n)$$

converge. Or

$$n\mathbb{P}(Y = n) = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1}.$$

La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

est divergente. Donc Y n'admet pas d'espérance finie.

$$Y \text{ n'admet pas d'espérance.}$$

Partie 2

On fixe $n \geq 1$. La variable U_n suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n-1\}$ et, conditionnellement à $(U_n = k)$, la variable Z_n suit la loi géométrique de paramètre $1 - \frac{k}{n}$.

3) Simulation de Z_n

```
def var_Z(n):
    U = rd.randint(0, n)
    Z = rd.geometric(1 - U/n)
    return Z
```

La commande `rd.randint(0,n)` renvoie un entier uniforme entre 0 et $n-1$.

4) Loi limite de Z_n

a) **Expression de $\mathbb{P}(Z_n = i)$.** Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet $((U_n = k))_{0 \leq k \leq n-1}$,

$$\mathbb{P}(Z_n = i) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(U_n = k) \mathbb{P}(Z_n = i \mid U_n = k).$$

Comme U_n est uniforme,

$$\mathbb{P}(U_n = k) = \frac{1}{n}.$$

Conditionnellement à $(U_n = k)$, Z_n suit la loi géométrique de paramètre $1 - k/n$, donc

$$\mathbb{P}(Z_n = i \mid U_n = k) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}.$$

En développant,

$$\mathbb{P}(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i.$$

b) **Limite de $\mathbb{P}(Z_n = i)$.** Pour $i \geq 1$, les deux sommes précédentes sont des sommes de Riemann. Ainsi

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} \longrightarrow \int_0^1 x^{i-1} dx = \frac{1}{i},$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \longrightarrow \int_0^1 x^i dx = \frac{1}{i+1}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = i) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

c) **Convergence en loi.** La famille

$$p_i = \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}, \quad i \geq 1,$$

définit bien une loi de probabilité sur \mathbb{N}^* , car

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = 1.$$

Ainsi (Z_n) converge en loi vers une variable aléatoire Z à valeurs dans \mathbb{N}^* vérifiant

$$\mathbb{P}(Z = i) = \frac{1}{i(i+1)} \quad (i \geq 1).$$

5) Espérance de Z_n

On peut utiliser la formule de l'espérance totale, car U_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs et, conditionnellement à chaque événement $(U_n = k)$, la variable Z_n suit une loi géométrique, donc admet une espérance finie.

Si $Z_n \mid (U_n = k)$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - k/n$, alors

$$\mathbb{E}(Z_n \mid U_n = k) = \frac{1}{1 - k/n} = \frac{n}{n - k}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(U_n = k) \mathbb{E}(Z_n \mid U_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n - k}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n - k}.$$

En posant $j = n - k$, on obtient

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

6) Équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$

a) **Encadrement logarithmique.** La fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Donc, pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

En intégrant sur $[k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

Or

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \ln(k+1) - \ln(k).$$

Donc

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

b) Encadrement de $\mathbb{E}(Z_n)$. Pour $n \geq 2$, en sommant l'inégalité de droite de la question précédente de $k = 1$ à $n - 1$, on obtient

$$\ln n = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \mathbb{E}(Z_n) - \frac{1}{n}.$$

Donc

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq \mathbb{E}(Z_n).$$

En sommant l'inégalité de gauche de $k = 1$ à $n - 1$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln n.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} = \mathbb{E}(Z_n) - 1.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(Z_n) - 1 \leq \ln n,$$

donc

$$\mathbb{E}(Z_n) \leq \ln n + 1.$$

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq \mathbb{E}(Z_n) \leq \ln n + 1 \quad (n \geq 2).$$

c) Équivalent. En divisant l'encadrement par $\ln n$, on obtient

$$1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{\mathbb{E}(Z_n)}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Les deux bornes tendent vers 1. Par le théorème d'encadrement,

$$\frac{\mathbb{E}(Z_n)}{\ln n} \rightarrow 1.$$

$$\mathbb{E}(Z_n) \sim \ln n.$$

4 Problème

On note $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles d'ordre n . Une matrice $M \in S_n(\mathbb{R})$ est dite positive lorsque

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXMX \geq 0.$$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Partie 1 : caractérisation des matrices symétriques positives

1) Sens direct

On suppose que A est positive et on considère une valeur propre λ de A .

a) Expression de λ comme quotient de Rayleigh. Puisque λ est valeur propre de A , il existe un vecteur colonne non nul $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$AX = \lambda X.$$

Alors

$${}^tXAX = {}^tX(\lambda X) = \lambda {}^tXX.$$

Comme $X \neq 0$, on a ${}^tXX > 0$. Donc

$$\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}.$$

b) Positivité de λ . Puisque A est positive,

$${}^tXAX \geq 0.$$

Comme ${}^tXX > 0$, on obtient

$$\lambda \geq 0.$$

2) Sens réciproque

a) Diagonalisation orthogonale. La matrice A est réelle symétrique. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

telles que

$$A = PD{}^tP.$$

b) Changement de variable. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et posons

$$Y = {}^tPX.$$

Alors

$${}^tXAX = {}^tXPD{}^tPX.$$

Or

$${}^tY = {}^t({}^tPX) = {}^tXP,$$

donc

$${}^tXAX = {}^tYDY.$$

c) **Positivité de la forme quadratique.** Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont toutes positives, alors

$${}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0.$$

Ainsi

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0.$$

Donc A est positive.

3) Conclusion

On a montré les deux implications.

$$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont positives.}$$

Partie 2 : racine carrée d'une matrice symétrique positive

Dans cette partie, $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et

$$A = PD^tP, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

avec P orthogonale.

4) Construction d'une racine carrée

a) **Définition de Δ .** D'après la partie 1, les valeurs propres λ_i de A sont positives. Les réels $\sqrt{\lambda_i}$ sont donc bien définis. On peut poser

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

b) **Propriétés de $B = P\Delta^tP$.** La matrice Δ est diagonale, donc symétrique, et P est orthogonale. Ainsi

$${}^tB = {}^t(P\Delta^tP) = P\Delta^tP = B.$$

Donc B est symétrique.

De plus, les valeurs propres de B sont les réels $\sqrt{\lambda_i}$, tous positifs. Par la caractérisation de la partie 1, B est positive.

Enfin,

$$B^2 = (P\Delta^tP)(P\Delta^tP) = P\Delta^{2t}P = PD^tP = A.$$

La matrice

$$B = P\Delta^tP$$

est symétrique positive et vérifie

$$B^2 = A.$$

5) Polynômes de Lagrange

Les réels μ_1, \dots, μ_p sont les valeurs propres distinctes de A . Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p \frac{x - \mu_k}{\mu_i - \mu_k}.$$

Si $x = \mu_i$, alors chaque facteur vaut 1, donc

$$\boxed{L_i(\mu_i) = 1.}$$

Si $j \neq i$, alors dans le produit définissant $L_i(\mu_j)$ apparaît le facteur correspondant à $k = j$:

$$\frac{\mu_j - \mu_j}{\mu_i - \mu_j} = 0.$$

Donc

$$\boxed{L_i(\mu_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j.}$$

6) Écriture de B comme polynôme en A

On définit

$$S = \sum_{i=1}^p \sqrt{\mu_i} L_i.$$

a) Valeurs de S sur le spectre de A . Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$,

$$S(\mu_j) = \sum_{i=1}^p \sqrt{\mu_i} L_i(\mu_j) = \sqrt{\mu_j},$$

car $L_j(\mu_j) = 1$ et $L_i(\mu_j) = 0$ pour $i \neq j$.

Comme chaque λ_k appartient à $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$, on en déduit

$$\boxed{S(\lambda_k) = \sqrt{\lambda_k} \quad (1 \leq k \leq n).}$$

b) Puissances de A . Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^k = PD^{kt}P.}$$

Pour $k = 0$, on a

$$A^0 = I_n = PI_n^tP = PD^{0t}P.$$

Pour $k \geq 1$, la relation s'obtient par récurrence, en utilisant ${}^tPP = I_n$:

$$A^{k+1} = A^k A = (PD^{kt}P)(PD^tP) = PD^{k+1t}P.$$

c) Calcul de $S(A)$. Écrivons $S(X) = \sum_{m=0}^d a_m X^m$. Alors

$$S(A) = \sum_{m=0}^d a_m A^m = \sum_{m=0}^d a_m PD^{mt}P = P \left(\sum_{m=0}^d a_m D^m \right) {}^tP.$$

Donc

$$S(A) = PS(D) {}^tP.$$

Or

$$S(D) = \text{diag}(S(\lambda_1), \dots, S(\lambda_n)) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) = \Delta.$$

Ainsi

$$\boxed{S(A) = P\Delta {}^tP = B.}$$

Partie 3 : unicité de la racine carrée symétrique positive

On suppose qu'il existe une autre matrice $C \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que

$$C^2 = A.$$

On veut montrer que $C = B$.

7) Commutation

a) **Commutation de C et A .** Comme $A = C^2$,

$$AC = C^2C = C^3$$

et

$$CA = CC^2 = C^3.$$

Donc

$$\boxed{AC = CA.}$$

b) **Commutation de B et C .** De $AC = CA$, on déduit par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^k C = C A^k.}$$

En effet, c'est évident pour $k = 0$ et $k = 1$, puis

$$A^{k+1}C = A(A^k C) = A(CA^k) = (AC)A^k = (CA)A^k = CA^{k+1}.$$

Comme $B = S(A)$ d'après la question 6c, B est un polynôme en A . Donc

$$BC = S(A)C = CS(A) = CB.$$

Ainsi

$$\boxed{BC = CB.}$$

8) Diagonalisation simultanée et unicité

On note b et c les endomorphismes symétriques de \mathbb{R}^n canoniquement associés à B et C .

a) **Commutation de b et c .** L'égalité matricielle $BC = CB$ se traduit directement par

$$\boxed{b \circ c = c \circ b.}$$

b) **Stabilité de E_i par c .** Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on pose

$$E_i = \text{Ker}(b - \sqrt{\mu_i} \text{Id}).$$

Soit $x \in E_i$. Alors

$$b(x) = \sqrt{\mu_i} x.$$

En utilisant la commutation de b et c ,

$$b(c(x)) = c(b(x)) = c(\sqrt{\mu_i} x) = \sqrt{\mu_i} c(x).$$

Donc $c(x) \in E_i$. Ainsi

$$\boxed{E_i \text{ est stable par } c.}$$

c) **Symétrie de l'endomorphisme induit c_i .** On note c_i l'endomorphisme induit par c sur E_i . Pour tous $x, y \in E_i$,

$$\langle c_i(x), y \rangle = \langle c(x), y \rangle.$$

Comme c est symétrique,

$$\langle c(x), y \rangle = \langle x, c(y) \rangle = \langle x, c_i(y) \rangle.$$

Donc

$$\boxed{c_i \text{ est symétrique sur } E_i.}$$

d) **Base orthonormale de E_i .** L'espace E_i est euclidien pour le produit scalaire induit. Comme c_i est symétrique, le théorème spectral assure l'existence d'une base orthonormale \mathcal{B}_i de E_i formée de vecteurs propres de c_i .

Par ailleurs, tout vecteur de E_i est par définition vecteur propre de b , associé à la valeur propre $\sqrt{\mu_i}$. Donc \mathcal{B}_i est une base orthonormale de E_i formée de vecteurs propres à la fois de c_i et de b .

e) **Construction d'une base de \mathbb{R}^n .** La matrice B est symétrique, donc b est diagonalisable dans une base orthonormale. Ses valeurs propres sont les $\sqrt{\mu_i}$, distinctes deux à deux puisque les μ_i le sont. Ainsi

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_p.$$

En concaténant les bases orthonormales $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$, on obtient une base orthonormale \mathcal{B} de \mathbb{R}^n dans laquelle b et c sont toutes deux diagonales.

f) **Conclusion : $C = B$.** Soit e un vecteur de la base \mathcal{B}_i . Alors

$$b(e) = \sqrt{\mu_i} e.$$

Comme e est aussi vecteur propre de c , il existe un réel ν tel que

$$c(e) = \nu e.$$

La matrice C est positive, donc toutes les valeurs propres de c sont positives : $\nu \geq 0$.

De plus, $B^2 = A$ et $C^2 = A$, donc $b^2 = c^2$. En appliquant cette égalité à e ,

$$\mu_i e = b^2(e) = c^2(e) = \nu^2 e.$$

Ainsi

$$\nu^2 = \mu_i.$$

Comme $\nu \geq 0$, on obtient

$$\nu = \sqrt{\mu_i}.$$

Donc $c(e) = b(e)$ pour tout vecteur e de la base \mathcal{B} . Ainsi $c = b$, et donc $C = B$.

La matrice B est l'unique matrice symétrique positive vérifiant $B^2 = A$.

On peut donc noter cette matrice

$$\boxed{A^{1/2} = B.}$$

Partie 4 : inversibilité et positivité

9) Matrices définies positives

On dit qu'une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive lorsque

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad {}^tXAX > 0.$$

Le raisonnement de la partie 1 s'adapte directement.

Si A est définie positive et si λ est une valeur propre de A , alors il existe $X \neq 0$ tel que

$$AX = \lambda X.$$

Comme précédemment,

$$\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}.$$

Le numérateur est strictement positif et le dénominateur aussi, donc $\lambda > 0$.

Réciproquement, si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives, écrivons

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}^tP,$$

avec $\lambda_i > 0$. Pour $X \neq 0$, posons $Y = {}^tPX$. Comme P est inversible, $Y \neq 0$. Alors

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0,$$

car au moins un des y_i est non nul et tous les λ_i sont strictement positifs.

A est définie positive \iff toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

10) Une première comparaison matricielle

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ et $N = M - I_n$.

a) Symétrie de N . Comme M est symétrique et I_n aussi,

$${}^tN = {}^t(M - I_n) = {}^tM - {}^tI_n = M - I_n = N.$$

Donc

$$N \in S_n(\mathbb{R}).$$

b) Spectre de M , inversibilité, puis positivité de $I_n - M^{-1}$. On suppose désormais que N est positive.

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(M)$. Il existe un vecteur non nul X tel que

$$MX = \lambda X.$$

Alors

$$NX = (M - I_n)X = (\lambda - 1)X.$$

Donc $\lambda - 1$ est une valeur propre de N . Comme N est positive, ses valeurs propres sont positives, donc

$$\lambda - 1 \geq 0.$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Sp}(M) \subset [1, +\infty[.}$$

En particulier, $0 \notin \text{Sp}(M)$, donc M est inversible.

Comme M est symétrique, elle est orthogonalement diagonalisable :

$$M = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t P,$$

avec $\lambda_i \geq 1$. Alors

$$M^{-1} = P \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)^t P.$$

Donc

$$I_n - M^{-1} = P \text{diag}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}, \dots, 1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)^t P.$$

Or chaque réel $1 - \frac{1}{\lambda_i}$ est positif. Par la caractérisation de la partie 1,

$$\boxed{I_n - M^{-1} \text{ est positive.}}$$

11) Comparaison de deux inverses

Soient $S_1, S_2 \in S_n(\mathbb{R})$, avec S_1 définie positive. On suppose que $S_2 - S_1$ est positive.

a) S_2 est définie positive. Pour tout vecteur non nul X ,

$${}^t X S_2 X = {}^t X S_1 X + {}^t X (S_2 - S_1) X.$$

Comme S_1 est définie positive,

$${}^t X S_1 X > 0,$$

et comme $S_2 - S_1$ est positive,

$${}^t X (S_2 - S_1) X \geq 0.$$

Donc

$${}^t X S_2 X > 0.$$

Ainsi

$$\boxed{S_2 \text{ est définie positive.}}$$

b) Inversibilité de $S_1^{1/2}$ et simplification. Comme S_1 est définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives. Les valeurs propres de $S_1^{1/2}$ sont donc les racines carrées de celles de S_1 , elles aussi strictement positives. Ainsi $S_1^{1/2}$ est inversible.

On note $S_1^{-1/2}$ son inverse. Alors

$$S_1^{-1/2} (S_2 - S_1) S_1^{-1/2} = S_1^{-1/2} S_2 S_1^{-1/2} - S_1^{-1/2} S_1 S_1^{-1/2}.$$

Comme $S_1 = (S_1^{1/2})^2$, on a

$$S_1^{-1/2} S_1 S_1^{-1/2} = I_n.$$

Donc, en posant

$$L = S_1^{-1/2} S_2 S_1^{-1/2},$$

on obtient

$$\boxed{S_1^{-1/2} (S_2 - S_1) S_1^{-1/2} = L - I_n.}$$

c) **Symétrie et positivité de $L - I_n$.** La matrice $S_1^{-1/2}$ est symétrique, car elle est l'inverse d'une matrice symétrique inversible. Comme S_2 est symétrique,

$${}^tL = {}^t(S_1^{-1/2}S_2S_1^{-1/2}) = S_1^{-1/2}S_2S_1^{-1/2} = L.$$

Donc L est symétrique. Il en va de même pour $L - I_n$.

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons

$$Y = S_1^{-1/2}X.$$

Alors

$${}^tX(L - I_n)X = {}^tXS_1^{-1/2}(S_2 - S_1)S_1^{-1/2}X = {}^tY(S_2 - S_1)Y.$$

Comme $S_2 - S_1$ est positive,

$${}^tY(S_2 - S_1)Y \geq 0.$$

Donc

$$\boxed{L - I_n \text{ est positive.}}$$

d) **Inversibilité de L et positivité de $I_n - L^{-1}$.** On applique la question 10 à la matrice symétrique $M = L$. Comme $L - I_n$ est positive, on obtient

$$\boxed{L \text{ est inversible}}$$

et

$$\boxed{I_n - L^{-1} \text{ est positive.}}$$

e) **Conclusion : positivité de $S_1^{-1} - S_2^{-1}$.** On calcule l'inverse de L :

$$L^{-1} = (S_1^{-1/2}S_2S_1^{-1/2})^{-1} = S_1^{1/2}S_2^{-1}S_1^{1/2}.$$

De plus,

$$I_n = S_1^{1/2}S_1^{-1}S_1^{1/2}.$$

Ainsi

$$I_n - L^{-1} = S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1})S_1^{1/2}.$$

Comme $I_n - L^{-1}$ est positive, on a

$$\boxed{S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1})S_1^{1/2} \text{ est positive.}}$$

Montrons alors que $S_1^{-1} - S_2^{-1}$ est positive. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et posons $Y = S_1^{-1/2}X$, c'est-à-dire $X = S_1^{1/2}Y$. Alors

$${}^tX(S_1^{-1} - S_2^{-1})X = {}^tYS_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1})S_1^{1/2}Y \geq 0.$$

Donc

$$\boxed{S_1^{-1} - S_2^{-1} \text{ est positive.}}$$

Fin de la correction.