Correction détaillée

EM Lyon 2026 – Mathématiques approfondies (ECG)

Code sujet : 295

Le sujet comporte deux problèmes indépendants. On rédige ci-dessous une correction complète, structurée question par question.

Problème 1

Dans toute cette partie, on travaille dans un espace euclidien réel muni du produit scalaire usuel.

Partie 1 – Un exemple

On se place dans le cas $n = 2$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonalisation de A

La matrice A est symétrique réelle. Cherchons ses valeurs propres.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, 2 et 0 sont les deux valeurs propres de A.
Après normalisation, on peut prendre

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La famille (u_1, u_2) est orthonormée. En posant

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a bien $A = QDQ^\top$, avec les coefficients diagonaux de D rangés par ordre décroissant.

$$\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2. Étude de la fonction φ

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on note $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$. Alors

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x/r & y/r \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \end{pmatrix}.$$

a) Comme

$$A\begin{pmatrix} x/r \\ y/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)/r \\ (x+y)/r \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\varphi(x,y) = \frac{x(x+y)+y(x+y)}{x^2+y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Ainsi

$$\boxed{\varphi(x,y) = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}.}$$

Cette expression est quotient de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ avec dénominateur jamais nul ; φ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc en particulier de classe $\mathcal{C}^2$, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) On dérive :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Un point critique vérifie

$$y(y^2-x^2) = 0, \qquad x(x^2-y^2) = 0.$$

Les cas $x = 0$ ou $y = 0$ conduisent immédiatement à $(x,y) = (0,0)$, exclu. Il reste donc

$$x^2 = y^2, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\text{les points critiques sont exactement les points des deux droites } y = x \text{ et } y = -x, \text{ privés de l'origine.}}$$

Il y en a donc une infinité.

c) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

$$\varphi(\alpha x, \alpha y) = 1 + \frac{2\alpha x\, \alpha y}{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2} = \varphi(x,y).$$

Donc

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ \varphi(\alpha x, \alpha y) = \varphi(x,y).}$$

La fonction est homogène de degré 0.

d) La question précédente montre que la valeur de φ ne dépend que de la direction du vecteur (x,y). Il suffit donc d'étudier φ sur le cercle unité S_1.

On peut aussi majorer directement :

$$\varphi(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}.$$

Or, par l'inégalité $(x-y)^2 \geq 0$,

$$2xy \leq x^2+y^2 \quad \Longrightarrow \quad (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2).$$

Ainsi

$$\varphi(x,y) \leq 2.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $(x-y)^2 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x = y \neq 0$.

Donc φ admet un maximum global sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, égal à 2, atteint exactement sur la droite $y = x$ privée de l'origine.

$$\boxed{\max_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} \varphi = 2, \qquad \varphi(x,y) = 2 \iff x = y \neq 0.}$$

Partie 2 – Une inégalité sur la trace

3. Traces de ${}^tBB$ et $B{}^tB$

Soit $B = (b_{i,j})_{1\le i\le n,\,1\le j\le m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

a) Les coefficients de ${}^tBB \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ sont

$$({}^tBB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,i}b_{k,j} \qquad (1 \le i, j \le m).$$

Les coefficients de $B{}^tB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont

$$(B{}^tB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} b_{i,k}b_{j,k} \qquad (1 \le i, j \le n).$$

b) En particulier,

$$\operatorname{Tr}({}^tBB) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_{k,i}^2, \qquad \operatorname{Tr}(B{}^tB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{i,k}^2.$$

Ces deux sommes sont les mêmes. Donc

$$\boxed{\operatorname{Tr}({}^tBB) = \operatorname{Tr}(B{}^tB).}$$

4. Représentation graphique pour $n = 2$

Pour $n = 2$,

$$D = [0,1]^2.$$

C'est le carré unité du plan.

De plus,

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$$

est la droite d'équation $x_1 + x_2 = 1$, dont l'intersection avec D est le segment joignant $(1, 0)$ à $(0, 1)$.

Enfin,

$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 2\}$$

et son intersection avec D est réduite au point $(1, 1)$.

5. Maximum de f_Λ sur $D \cap C_k$

On considère

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \qquad \lambda_1 > \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n,$$

et

$$f_\Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Comme $D \cap C_k$ est fermé borné de $\mathbb{R}^n$, il est compact, et f_Λ est continue : elle y admet donc un maximum global.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in D \cap C_k$. On a $0 \le x_i \le 1$ et $\sum_{i=1}^n x_i = k$. Alors

$$\begin{aligned} f_\Lambda(x) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i x_i \\ &\le \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \lambda_k \sum_{i=k+1}^n x_i \\ &= \lambda_k k + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda_k) x_i \\ &\le \lambda_k k + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda_k) = \sum_{i=1}^k \lambda_i. \end{aligned}$$

Cette majoration est atteinte pour

$$x^* = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, 0, \dots, 0).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\max_{D \cap C_k} f_\Lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i,}$$

et un point où ce maximum est atteint est

$$\boxed{x^* = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0).}$$

(Remarque : si $\lambda_k = \lambda_{k+1}$, le maximiseur n'est pas nécessairement unique.)

6. Diagonale d'une projection orthogonale

Soit π un projecteur de $\mathbb{R}^n$, de matrice $P = (p_{i,j})$ dans la base canonique.

a) Comme $\pi^2 = \pi$, on a la décomposition

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(\pi) \oplus \operatorname{Ker}(\pi).$$

Si $r = \operatorname{rg}(P) = \dim(\operatorname{Im}(\pi))$, alors dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de π vaut

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sa trace vaut donc r. La trace étant invariante par changement de base,

$$\boxed{\operatorname{rg}(P) = \operatorname{Tr}(P).}$$

b) Si π est orthogonale, alors

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(\pi) \oplus \operatorname{Im}(\pi)^\perp.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire

$$x = \pi(x) + (x - \pi(x)), \qquad \pi(x) \perp (x - \pi(x)).$$

Par Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|\pi(x)\|^2 + \|x - \pi(x)\|^2 \ge \|\pi(x)\|^2.$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|\pi(x)\| \le \|x\|.}$$

c) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique. Pour tout i,

$$p_{i,i} = \langle \pi(e_i), e_i \rangle.$$

Or, comme $e_i - \pi(e_i) \in \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(\pi)^\perp$, on a

$$\langle \pi(e_i), e_i \rangle = \langle \pi(e_i), \pi(e_i) \rangle = \|\pi(e_i)\|^2.$$

Par la question précédente, $\|\pi(e_i)\| \leq \|e_i\| = 1$. Donc

$$0 \leq p_{i,i} = \|\pi(e_i)\|^2 \leq 1.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad p_{i,i} \in [0, 1].}$$

7. Diagonalisation orthogonale de A

La matrice A est symétrique réelle. Par le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale réelle D telles que

$$A = QDQ^\top.$$

En réordonnant éventuellement la base orthonormée de vecteurs propres, on peut supposer

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \qquad \text{avec} \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

8. Calcul de ${}^tMM$

Les colonnes $C_1, \dots, C_k$ de M sont orthonormées. L'élément (i, j) de ${}^tMM$ vaut donc

$$({}^tMM)_{i,j} = \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Ainsi,

$$\boxed{{}^tMM = I_k.}$$

9. Cas où A n'a qu'une seule valeur propre

Si toutes les valeurs propres de A sont égales à λ_1, alors, puisque A est diagonalisable,

$$A = \lambda_1 I_n.$$

Par suite,

$$\mathrm{Tr}({}^tMAM) = \mathrm{Tr}(\lambda_1 {}^tMM) = \lambda_1 \,\mathrm{Tr}(I_k) = k\lambda_1.$$

Donc cette quantité ne dépend pas de M.

$$\boxed{\mathrm{Tr}({}^tMAM) = k\lambda_1.}$$

10. Cas général

On suppose désormais que A admet au moins deux valeurs propres distinctes. On pose

$$X = Q^\top M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}), \qquad P = X\,X^\top.$$

a) On calcule d'abord
$$X^\top X = M^\top Q Q^\top M = M^\top M = I_k.$$
Alors
$$P^2 = X\,\underbrace{(X^\top X)}_{I_k}\,X^\top = XX^\top = P, \qquad P^\top = XX^\top = P.$$
Donc P est un projecteur symétrique, c'est-à-dire un projecteur orthogonal.

$$\boxed{P \text{ est la matrice d'une projection orthogonale.}}$$

b) L'inclusion $\mathrm{Ker}(X^\top) \subset \mathrm{Ker}(P)$ est immédiate car $Pu = XX^\top u$.
Réciproquement, si $Pu = 0$, alors
$$0 = u^\top P u = u^\top X X^\top u = \|X^\top u\|^2,$$
d'où $X^\top u = 0$. Ainsi
$$\boxed{\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ker}(X^\top).}$$
Comme $X^\top X = I_k$, la matrice X est de rang k. Donc $X^\top$ est aussi de rang k ; son noyau est de dimension $n-k$. Le noyau de P ayant même dimension, on obtient
$$\mathrm{rg}(P) = n - \dim \mathrm{Ker}(P) = k.$$
Ainsi
$$\boxed{\mathrm{rg}(P) = k.}$$

c) On utilise l'invariance cyclique de la trace :
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}({}^tMAM) &= \mathrm{Tr}({}^tMQDQ^\top M)\\ &= \mathrm{Tr}(X^\top D X)\\ &= \mathrm{Tr}(XX^\top D) = \mathrm{Tr}(PD).\end{aligned}$$
Donc
$$\boxed{\mathrm{Tr}({}^tMAM) = \mathrm{Tr}(PD).}$$
Or D est diagonale, donc
$$\mathrm{Tr}(PD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_{i,i} = f_\Lambda(p_{1,1}, \dots, p_{n,n}).$$
Comme P est un projecteur orthogonal, la question 6.c donne $p_{i,i} \in [0,1]$. De plus, P est un projecteur de rang k, donc par la question 6.a,
$$\sum_{i=1}^n p_{i,i} = \mathrm{Tr}(P) = \mathrm{rg}(P) = k.$$
Ainsi,
$$(p_{1,1}, \dots, p_{n,n}) \in D \cap C_k.$$
On en déduit
$$\boxed{\mathrm{Tr}({}^tMAM) \le \max\{f_\Lambda(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in D \cap C_k\}.}$$

d) Si l'on choisit pour colonnes de M les vecteurs propres $V_1, \dots, V_k$, alors

$$M = \begin{pmatrix} V_1 & \cdots & V_k \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad X = Q^\top M = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_k \end{pmatrix}.$$

Dès lors

$$P = XX^\top = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

et donc

$$\operatorname{Tr}(PD) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i.$$

C'est précisément la valeur maximale trouvée à la question 5. Ainsi la quantité $\operatorname{Tr}({}^tMAM)$ est maximale pour ce choix de M.

$$\boxed{\text{Un choix optimal consiste à prendre } C_i = V_i \text{ pour } 1 \leq i \leq k.}$$

e) Dans la question 2.d, on était dans le cas particulier $n = 2$, $k = 1$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on prend

$$M = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

alors

$$\operatorname{Tr}({}^tMAM) = \varphi(x, y).$$

Le résultat obtenu ici dit donc que le maximum est atteint lorsque la colonne de M est un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de A. C'est exactement ce que l'on avait constaté à la question 2.d : le maximum vaut 2 et est atteint dans la direction de $(1, 1)$.

Problème 2

Partie 1 – Résultats préliminaires

1. Fonction génératrice G_W

On considère

$$G_W(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(W = n) t^n, \qquad t \in [0, 1].$$

a) Pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \geq 0$,

$$0 \leq \mathbb{P}(W = n) t^n \leq \mathbb{P}(W = n).$$

Or la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(W = n)$ converge (sa somme vaut $\mathbb{P}(W \geq 0) \leq 1$). La série définissant $G_W(t)$ converge donc absolument pour tout $t \in [0, 1]$.

b) Chaque terme $t \mapsto \mathbb{P}(W = n) t^n$ est croissant sur $[0, 1]$; la somme de fonctions croissantes à termes positifs est croissante. Donc

$$\boxed{G_W \text{ est croissante sur } [0, 1].}$$

c) Comme G_W est croissante et majorée par $G_W(1)$, elle admet une limite finie à gauche en 1 : il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\lim_{t \to 1^-} G_W(t) = \ell.}$$

d) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1[$,

$$\sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(W=n)t^n \leq G_W(t) \leq G_W(1).$$

En faisant tendre t vers 1^-, on obtient

$$\sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(W=n) \leq \ell \leq G_W(1).$$

Puis en faisant tendre m vers $+\infty$,

$$G_W(1) \leq \ell \leq G_W(1).$$

Donc

$$\boxed{\ell = G_W(1).}$$

e) On vient de montrer que

$$\lim_{t\to 1^-} G_W(t) = G_W(1),$$

donc G_W est continue en 1.

f) Pour $t = 0$, la série est triviale. Si $t \in (0,1)$, alors

$$0 \leq n\mathbb{P}(W=n)t^{n-1} \leq \frac{1}{(1-t)^2}\mathbb{P}(W=n),$$

car

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

et tous les termes sont positifs. Comme $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(W=n)$ converge, la série

$$\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(W=n)t^{n-1}$$

converge absolument.

2. Une forme du second lemme de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

a) Posons

$$h(x) = e^{-x} - 1 + x.$$

Alors

$$h'(x) = 1 - e^{-x}, \qquad h''(x) = e^{-x} > 0.$$

La fonction h est convexe, et $h'(0) = 0$, donc 0 est son minimum global. Ainsi $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\boxed{1 - x \leq e^{-x}.}$$

b) Pour $1 \leq n \leq m$,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\Big).$$

Par indépendance,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\Big) = \prod_{k=n}^{m}(1 - \mathbb{P}(A_k)).$$

En utilisant la question précédente,

$$1 - \mathbb{P}(A_k) \leq e^{-\mathbb{P}(A_k)},$$

donc

$$\prod_{k=n}^{m} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \exp\Big(- \sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)\Big).$$

Par suite,

$$\boxed{\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\Big) \geq 1 - \exp\Big(- \sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)\Big).}$$

c) Supposons $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ divergente. Fixons n. Alors la série de queue $\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)$ tend vers $+\infty$ quand $m \to +\infty$. D'après b),

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\Big) \geq 1 - \exp\Big(- \sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)\Big) \xrightarrow[m\to\infty]{} 1.$$

Or les événements $\bigcup_{k=n}^{m} A_k$ croissent avec m, donc

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\Big) = 1.$$

En posant

$$B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k,$$

on a une suite décroissante (B_n) et $\mathbb{P}(B_n) = 1$ pour tout n. Par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geq 1} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = 1.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\Big) = 1.}$$

Autrement dit, presque sûrement, une infinité des événements A_n se réalisent.

3. Loi de U_n et de $V_{n,k}$

Fixons $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $j_0 = 0$.

L'événement $\{U_n = (j_1, \dots, j_n)\}$ s'écrit

$$\{W_1 = j_1,\ W_2 = j_2 - j_1,\ \dots,\ W_n = j_n - j_{n-1}\}.$$

Par indépendance et identité de loi,

$$\mathbb{P}(U_n = (j_1, \dots, j_n)) = \prod_{r=1}^{n} \mathbb{P}(W_1 = j_r - j_{r-1}).$$

De même,

$$\{V_{n,k} = (j_1, \dots, j_n)\} = \{W_k = j_1,\ W_{k+1} = j_2 - j_1,\ \dots,\ W_{n-1+k} = j_n - j_{n-1}\},$$

donc

$$\mathbb{P}(V_{n,k} = (j_1, \dots, j_n)) = \prod_{r=1}^{n} \mathbb{P}(W_1 = j_r - j_{r-1}).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{P}(U_n = (j_1, \dots, j_n)) = \mathbb{P}(V_{n,k} = (j_1, \dots, j_n)).}$$

Les vecteurs aléatoires U_n et $V_{n,k}$ ont donc même loi.

4. Produit de Cauchy de deux séries positives convergentes

On considère deux séries convergentes à termes positifs

$$\sum_{n\geq 1} a_n, \qquad \sum_{n\geq 0} b_n,$$

et pour $n \geq 1$,

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

a) On a

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_i b_j \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} b_j\Big).$$

Inversement,

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} b_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j.$$

À chaque couple (i, j) correspond $k = i + j \in \{1, \ldots, 2n\}$, et le terme $a_i b_j$ apparaît dans c_k. Tous les termes sont positifs, donc

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} b_j\Big) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k.$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c_k \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} b_j\Big) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k.}$$

b) Posons

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \to A, \qquad B_n = \sum_{j=0}^{n} b_j \to B.$$

D'après a),

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \leq A_n B_n \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k.$$

Comme $A_n B_n \to AB$, le théorème des gendarmes montre que la suite des sommes partielles de $\sum c_k$ converge aussi vers AB. Donc

$$\boxed{\sum_{k\geq 1} c_k \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \Big(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\Big).}$$

Partie 2 – Une marche aléatoire

On considère des variables indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad S_0 = 0.$$

5. Espérance et variance

a) Pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(X_n) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

De plus,

$$\mathbb{E}(X_n^2) = 1, \qquad \mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = 1.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = 0, \qquad \mathbb{V}(X_n) = 1.}$$

b) Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = 0.$$

Comme les X_k sont indépendantes,

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = 0, \qquad \mathbb{V}(S_n) = n.}$$

6. Convergence en probabilité de S_n/n

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev donne

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|S_n| \geq n\varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

Le membre de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Ainsi

$$\boxed{\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.}$$

La variable aléatoire certaine limite est donc la constante nulle.

7. Simulations sous Python

Une réponse possible est :

a)
```
def simul_X():
    return rd.choice([-1, 1])
```

b)
```
def simul_S(n):
    s = 0
    for _ in range(n):
        s += simul_X()
    return s
```

8. Réécriture de S_n

On a

$$\frac{X_k+1}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_k = 1, \\ 0 & \text{si } X_k = -1. \end{cases}$$

Donc

$$X_k = 2 \cdot \frac{X_k+1}{2} - 1.$$

En sommant de 1 à n,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k+1}{2} - n.$$

Ainsi

$$\boxed{S_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k+1}{2} - n.}$$

La variable $\dfrac{X_k+1}{2}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\frac{X_k+1}{2} \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

9. Loi de S_n

a) Si $S_n = i$, alors en posant $N_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{X_k+1}{2}$, on a

$$S_n = 2N_n - n = i \qquad \Longrightarrow \qquad N_n = \frac{n+i}{2}.$$

Le membre de droite doit être entier. Donc si i et n ne sont pas de même parité,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = i) = 0.}$$

b) La variable N_n est binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Si i a la même parité que n, alors

$$\mathbb{P}(S_n = i) = \mathbb{P}\left(N_n = \frac{n+i}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = i) = \binom{n}{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{si } i \equiv n \pmod 2.}$$

10. Asymptotique et récurrence

a) En prenant $i = 0$ dans la question précédente,

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Avec la formule de Stirling,

$$(2n)! \sim \sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}, \qquad n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}.$$

Donc

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n/e)^{2n}}{2\pi n\,(n/e)^{2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Par suite,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{2n}=0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.}$$

b) Le renvoi direct à la question 2.c est un peu elliptique si l'on prend simplement les événements $\{S_{2n}=0\}$, car ils ne sont pas indépendants. Voici l'argument standard.

Posons

$$\tau = \inf\{m \geq 1 \mid S_m = 0\}$$

(le premier temps de retour en 0) et, pour $n \geq 1$,

$$r_n = \mathbb{P}(S_{2n}=0), \qquad f_n = \mathbb{P}(\tau = 2n).$$

Si $S_{2n}=0$, il existe un premier retour en 0, disons au temps $2k$ avec $1 \leq k \leq n$; après ce premier retour, la marche repart de 0 avec la même loi. On a donc la relation de renouvellement

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} f_k\, r_{n-k} \qquad (n \geq 1),$$

avec $r_0 = 1$.

Introduisons les séries génératrices

$$R(x) = \sum_{n\geq 0} r_n x^n, \qquad F(x) = \sum_{n \geq 1} f_n x^n, \qquad 0 \leq x < 1.$$

La relation précédente donne

$$R(x) = 1 + F(x)R(x), \qquad \text{donc} \qquad R(x) = \frac{1}{1-F(x)}.$$

Or, d'après a),

$$r_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

donc la série $\sum r_n$ diverge. Par conséquent,

$$R(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty,$$

ce qui impose

$$F(1^-) = 1.$$

Autrement dit,

$$\mathbb{P}(\tau < +\infty) = \sum_{n\geq 1} f_n = 1.$$

La marche revient donc presque sûrement une première fois en 0. Après ce retour, les incréments futurs sont encore indépendants et de même loi que les incréments initiaux : on retrouve exactement la même situation. En répétant l'argument après chaque retour, on obtient que la marche revient presque sûrement en 0 une infinité de fois.

$$\boxed{\text{Presque sûrement, la marche aléatoire passe une infinité de fois par 0.}}$$

11. Étude de la variable T

On rappelle que $T = -1$ si $S_n \leq 0$ pour tout $n \geq 1$, et sinon T est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $S_n > 0$.

a) $T = 1$ signifie que la marche est strictement positive dès le premier instant, donc que $X_1 = 1$. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(T = 1) = \frac{1}{2}.}$$

b) Pour $n \geq 2$, l'événement $\{T = n\}$ signifie :

— avant l'instant n, on n'a jamais été strictement positif ;

— à l'instant n, on devient strictement positif pour la première fois.

Comme les sauts valent ± 1, on ne peut pas passer de ≤ 0 à une valeur strictement positive autre que 1. Donc

$$\boxed{\{T = n\} = \Big(\bigcap_{j=1}^{n-1} \{S_j \leq 0\}\Big) \cap \{S_n = 1\}.}$$

c) Si n est pair, alors S_n a la même parité que n, donc il est pair. Il ne peut donc pas valoir 1. D'après b),

$$\boxed{n \text{ pair } \Longrightarrow \mathbb{P}(T = n) = 0.}$$

12. Les événements R_k

On définit, pour $k \geq 1$,

$$R_k = \{S_1 = -1\} \cap \Big(\bigcap_{j=2}^{k} \{S_j \leq -1\}\Big) \cap \{S_{k+1} = 0\}.$$

a) L'événement R_k signifie :

> la marche part d'abord à gauche, reste ensuite strictement négative jusqu'au temps k, puis revient en 0 au temps $k + 1$.

Autrement dit, il s'agit d'une excursion négative de longueur $k + 1$.

b) Soit $(x_1, \ldots, x_k) \in \{-1, 1\}^k$ une trajectoire réalisant $\{T = k\}$. Alors ses sommes partielles $s_j = x_1 + \cdots + x_j$ vérifient

$$s_j \leq 0 \ (1 \leq j \leq k - 1), \qquad s_k = 1.$$

En particulier $x_k = 1$. À cette trajectoire, associons la trajectoire de longueur $k + 1$

$$y = (-x_k, -x_{k-1}, \ldots, -x_1, 1).$$

Si $t_j = y_1 + \cdots + y_j$, on obtient

$$t_1 = -x_k = -1, \qquad t_j = s_{k-j} - 1 \leq -1 \quad (2 \leq j \leq k), \qquad t_{k+1} = 0.$$

Cette nouvelle trajectoire réalise donc R_k.

La transformation est bijective entre les trajectoires comptées par $\{T = k\}$ et celles comptées par R_k. Or une trajectoire de longueur k a probabilité 2^{-k}, tandis qu'une trajectoire de longueur $k + 1$ a probabilité $2^{-(k+1)}$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T = k).}$$

c) Soit $n \geq 1$. Sur l'événement $\{T = n+1\}$, comme $n+1 \geq 2$, le premier pas est nécessairement -1, puis la marche revient une première fois en 0 à un certain instant $k+1$ avec $1 \leq k \leq n-1$, avant de repartir et d'atteindre pour la première fois un niveau strictement positif au temps $n+1$.

Ainsi, si l'on note

$$\widetilde{S}_j = S_{k+1+j} - S_{k+1} \qquad (j \geq 0),$$

on peut écrire la décomposition disjointe

$$\{T = n+1\} = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} \Big(R_k \cap \{\widetilde{T} = n-k\} \Big),$$

où $\widetilde{T}$ désigne la variable analogue à T construite à partir de la marche translatée $(\widetilde{S}_j)_{j \geq 0}$.

C'est exactement le sens de la formule demandée dans l'énoncé.

d) L'événement R_k dépend seulement des incréments $X_1, \ldots, X_{k+1}$, tandis que l'événement $\{\widetilde{T} = n-k\}$ dépend seulement des incréments $X_{k+2}, \ldots, X_{n+1}$. Ces deux événements sont donc indépendants.

De plus, par indépendance et stationnarité des incréments, la marche translatée a même loi que la marche initiale, donc

$$\mathbb{P}(\widetilde{T} = n-k) = \mathbb{P}(T = n-k).$$

La décomposition de c) donne alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = n+1) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(R_k)\mathbb{P}(T = n-k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}(T = n-k).
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(T = 0) = 0$, on peut écrire sans changer la somme

$$\boxed{\mathbb{P}(T = n+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}(T = n-k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T = k)\mathbb{P}(T = n-k).}$$

Remarque finale. La relation obtenue à la question 12.d est une récurrence de type Catalan pour les probabilités $\mathbb{P}(T = n)$ (en fait, seules les valeurs impaires sont non nulles). Elle est caractéristique de la marche aléatoire simple symétrique.