

Correction détaillée

BCE 2026 – Mathématiques T
Filière économique et commerciale – voie technologique

Sujet code 294

Exercice 1

On considère, pour tout entier naturel n et tout réel x ,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{1-x}.$$

Partie I – Quelques exemples

1) Étude de $f_1(x) = xe^{1-x}$.

(a) Comme $f_1(x) = xe^{1-x}$, on obtient par dérivation d'un produit

$$f_1'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}.$$

(b) Pour tout réel x , on a $e^{1-x} > 0$. Le signe de $f_1'(x)$ est donc celui de $1-x$:

$$f_1'(x) > 0 \iff x < 1, \quad f_1'(1) = 0, \quad f_1'(x) < 0 \iff x > 1.$$

Ainsi, f_1 est strictement croissante sur $] -\infty, 1]$ puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

(c) En dérivant encore,

$$f_1''(x) = -(e^{1-x}) + (1-x)(-e^{1-x}) = (x-2)e^{1-x}.$$

Comme $e^{1-x} > 0$, le signe de $f_1''(x)$ est celui de $x-2$:

$$f_1''(x) < 0 \text{ si } x < 2, \quad f_1''(x) > 0 \text{ si } x > 2.$$

La convexité change donc une seule fois, en $x=2$. La courbe de f_1 admet donc un unique point d'inflexion, de coordonnées

$$(2, f_1(2)) = (2, 2e^{-1}) = \left(2, \frac{2}{e}\right).$$

2) Limites de f_1 .

(a) On sait que $\lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$.

Si $x \rightarrow -\infty$, alors $-x \rightarrow +\infty$ et

$$f_1(x) = xe^{1-x} = e x e^{-x}.$$

Or $e^{-x} \rightarrow +\infty$ et $x < 0$ pour x assez négatif; le produit est donc négatif et de module arbitrairement grand. Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty.}$$

(b) Pour tout réel x ,

$$f_1(x) = xe^{1-x} = e \frac{x}{e^x}.$$

(c) Par croissance comparée de l'exponentielle et du polynôme, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0.}$$

3) Tableau de variations de f_1 .

On a

$$f_1(1) = 1 \cdot e^0 = 1.$$

Ainsi, le tableau de variations est :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$
$f_1(x)$	$-\infty$	1	0

avec f_1 croissante puis décroissante.

4) Étude de $f_2(x) = \frac{x^2}{2}e^{1-x}$.

(a) On dérive :

$$f_2'(x) = xe^{1-x} + \frac{x^2}{2}(-e^{1-x}) = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)e^{1-x} = \frac{x(2-x)}{2}e^{1-x}.$$

(b) Comme $\frac{1}{2}e^{1-x} > 0$, le signe de $f_2'(x)$ est celui de $x(2-x)$:

$$\begin{cases} f_2'(x) < 0 & \text{si } x < 0, \\ f_2'(0) = 0, \\ f_2'(x) > 0 & \text{si } 0 < x < 2, \\ f_2'(2) = 0, \\ f_2'(x) < 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Donc f_2 est décroissante sur $] -\infty, 0]$, croissante sur $[0, 2]$, puis décroissante sur $[2, +\infty[$.

5) Limites de f_2 .

(a) Quand $x \rightarrow -\infty$,

$$f_2(x) = \frac{x^2}{2}e^{1-x} = \frac{e}{2}x^2e^{-x}.$$

Ici $x^2 > 0$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = +\infty.}$$

(b) De même,

$$f_2(x) = \frac{e}{2} \frac{x^2}{e^x}.$$

Par croissance comparée, $\frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, d'où

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0.}$$

6) Tableau de variations de f_2 .

On a

$$f_2(0) = 0, \quad f_2(2) = \frac{4}{2}e^{-1} = \frac{2}{e}.$$

Donc :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f_2'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f_2(x)$	$+\infty$	0	$\frac{2}{e}$	0	

avec une décroissance sur $] -\infty, 0]$, puis une croissance sur $[0, 2]$, puis une décroissance sur $[2, +\infty[$.

Partie II – Quelques utilisations de l'informatique

7) Une fonction correcte est par exemple :

```
def fact(n):
    f = 1
    for k in range(1, n+1):
        f = f * k
    return f
```

8) Une fonction très courte calculant $f_n(x)$ est :

```
def f(n, x):
    return (x**n / fact(n)) * np.exp(1 - x)
```

9) Identification des graphes.

- Le **graphique 3** représente f_1 : la fonction est négative sur $] -\infty, 0[$, s'annule en 0, atteint un maximum en $x = 1$ avec $f_1(1) = 1$, puis tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.
- Le **graphique 1** représente f_2 : la fonction est positive, tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$, admet un minimum en $x = 0$ avec $f_2(0) = 0$, un maximum en $x = 2$ avec $f_2(2) = \frac{2}{e}$, puis tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

Donc

$$\boxed{\text{Graphique 3} = f_1 \quad \text{et} \quad \text{Graphique 1} = f_2.}$$

Partie III – Intégrales définies à partir des fonctions f_n

Pour $A > 0$, on pose

$$I_n(A) = \int_0^A \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt = \int_0^A f_n(t) dt,$$

et, si elle converge,

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

10) Étude de I_0 .

(a) Pour tout $A > 0$,

$$I_0(A) = \int_0^A e^{1-t} dt = [-e^{1-t}]_0^A = -e^{1-A} + e.$$

Ainsi

$$\boxed{I_0(A) = e - e^{1-A}.}$$

- (b) Quand $A \rightarrow +\infty$, on a $e^{1-A} \rightarrow 0$. Donc $I_0(A) \rightarrow e$, d'où la convergence de l'intégrale impropre et

$$\boxed{I_0 = e.}$$

11) Étude de I_1 .

- (a) On intègre par parties avec

$$u(t) = t, \quad v'(t) = e^{1-t}, \quad u'(t) = 1, \quad v(t) = -e^{1-t}.$$

Alors

$$I_1(A) = \int_0^A te^{1-t} dt = [-te^{1-t}]_0^A + \int_0^A e^{1-t} dt = -Ae^{1-A} + I_0(A).$$

C'est bien le résultat demandé.

- (b) En remplaçant $I_0(A)$ par son expression,

$$I_1(A) = -Ae^{1-A} + e - e^{1-A} = -(A+1)e^{1-A} + e.$$

Donc

$$\boxed{I_1(A) = -Ae^{1-A} - e^{1-A} + e.}$$

- (c) Quand $A \rightarrow +\infty$, on a $(A+1)e^{1-A} \rightarrow 0$ par croissance comparée. Par conséquent,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} I_1(A) = e.$$

Ainsi l'intégrale impropre converge et

$$\boxed{I_1 = e.}$$

On admet de même que

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2} e^{1-t} dt$$

converge et vaut

$$\boxed{I_2 = e.}$$

Partie IV – Une variable à densité

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{1}{e} f_1(t) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Comme $f_1(t) = te^{1-t}$, cela donne pour $t \geq 0$

$$g(t) = \frac{1}{e} te^{1-t} = te^{-t}.$$

- 12) Pour tout $t < 0$, $g(t) = 0 \geq 0$, et pour tout $t \geq 0$, $g(t) = te^{-t} \geq 0$. De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e} f_1(t) dt = \frac{1}{e} I_1 = \frac{1}{e} \cdot e = 1.$$

Ainsi g est positive et d'intégrale 1 sur \mathbb{R} :

$$\boxed{g \text{ est une densité de probabilité.}}$$

13) Soit X une variable aléatoire de densité g , et G sa fonction de répartition.

(a) Pour $x < 0$,

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt = 0.$$

Pour $x \geq 0$,

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt = \int_0^x te^{-t} dt = \frac{1}{e} \int_0^x te^{1-t} dt = \frac{1}{e} I_1(x).$$

Or

$$I_1(x) = -(x+1)e^{1-x} + e.$$

Donc

$$G(x) = \frac{1}{e} \left(-(x+1)e^{1-x} + e \right) = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

Finalement,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

(b) On calcule

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot xe^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

Or

$$x^2 e^{-x} = \frac{2}{e} \cdot \frac{x^2}{2} e^{1-x},$$

donc

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{e} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{1-x} dx = \frac{2}{e} I_2 = \frac{2}{e} \cdot e = 2.$$

Comme I_2 converge, l'intégrale définissant l'espérance converge aussi. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 2.}$$

Exercice 2

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} = 3u_n + 6v_n. \end{cases}$$

Partie I – Variations des suites (u_n) et (v_n)

1) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont des entiers strictement positifs.

Initialisation. $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ sont bien des entiers strictement positifs.

Hérédité. Supposons u_n et v_n entiers strictement positifs. Alors

$$u_{n+1} = 5u_n + 2v_n, \quad v_{n+1} = 3u_n + 6v_n$$

sont des sommes d'entiers positifs, donc des entiers strictement positifs.

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 4u_n + 2v_n > 0$$

car u_n et v_n sont strictement positifs. Donc (u_n) est strictement croissante.

De même,

$$v_{n+1} - v_n = 3u_n + 5v_n > 0,$$

donc (v_n) est strictement croissante.

Ainsi

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont strictement croissantes.}}$$

Partie II – Terme général à l'aide de deux suites auxiliaires

On définit

$$x_n = u_n + v_n, \quad y_n = 3u_n - 2v_n.$$

3)

$$x_0 = u_0 + v_0 = 1 + 2 = 3, \quad y_0 = 3u_0 - 2v_0 = 3 - 4 = -1.$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = (5u_n + 2v_n) + (3u_n + 6v_n) = 8(u_n + v_n) = 8x_n.$$

Donc (x_n) est géométrique de raison 8 et de premier terme $x_0 = 3$. Ainsi

$$\boxed{x_n = 3 \cdot 8^n.}$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_{n+1} = 3u_{n+1} - 2v_{n+1} = 3(5u_n + 2v_n) - 2(3u_n + 6v_n) = 9u_n - 6v_n = 3(3u_n - 2v_n) = 3y_n.$$

Donc (y_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $y_0 = -1$. Ainsi

$$\boxed{y_n = -3^n.}$$

6) Pour un entier n fixé, le système

$$\begin{cases} u_n + v_n = x_n, \\ 3u_n - 2v_n = y_n \end{cases}$$

se résout de la façon suivante.

De la première équation, $v_n = x_n - u_n$. En remplaçant dans la seconde :

$$3u_n - 2(x_n - u_n) = y_n \implies 5u_n = y_n + 2x_n.$$

Donc

$$u_n = \frac{y_n + 2x_n}{5}.$$

Puis

$$v_n = x_n - u_n = x_n - \frac{y_n + 2x_n}{5} = \frac{3x_n - y_n}{5}.$$

Ainsi

$$\boxed{u_n = \frac{y_n + 2x_n}{5} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3x_n - y_n}{5}.}$$

7) En utilisant les expressions de x_n et y_n ,

$$u_n = \frac{-3^n + 2 \cdot 3 \cdot 8^n}{5} = -\frac{1}{5}3^n + \frac{6}{5}8^n,$$

et

$$v_n = \frac{3 \cdot 3 \cdot 8^n - (-3^n)}{5} = \frac{1}{5}3^n + \frac{9}{5}8^n.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = -\frac{1}{5}3^n + \frac{6}{5}8^n, \quad v_n = \frac{1}{5}3^n + \frac{9}{5}8^n.}$$

Partie III – Terme général à l'aide d'une récurrence d'ordre 2

8) On calcule

$$u_1 = 5u_0 + 2v_0 = 5 + 4 = 9, \quad v_1 = 3u_0 + 6v_0 = 3 + 12 = 15.$$

9) On nous donne

$$(*) \quad v_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - 5u_n).$$

Alors

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+2} - 5u_{n+1}).$$

Mais, d'après la relation de récurrence sur v_n ,

$$v_{n+1} = 3u_n + 6v_n = 3u_n + 6 \cdot \frac{1}{2}(u_{n+1} - 5u_n) = 3u_n + 3u_{n+1} - 15u_n = 3u_{n+1} - 12u_n.$$

On identifie les deux expressions de v_{n+1} :

$$\frac{1}{2}(u_{n+2} - 5u_{n+1}) = 3u_{n+1} - 12u_n.$$

En multipliant par 2,

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} = 6u_{n+1} - 24u_n,$$

soit

$$\boxed{u_{n+2} = 11u_{n+1} - 24u_n.}$$

10)

$$X^2 - 11X + 24 = (X - 3)(X - 8).$$

Les racines sont donc

$$\boxed{x_1 = 3, \quad x_2 = 8.}$$

11) On admet qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_n = a3^n + b8^n.$$

Avec $n = 0$:

$$u_0 = 1 = a + b.$$

Avec $n = 1$:

$$u_1 = 9 = 3a + 8b.$$

On résout :

$$a = 1 - b, \quad 3(1 - b) + 8b = 9$$

d'où

$$3 + 5b = 9, \quad b = \frac{6}{5}, \quad a = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}.$$

Ainsi

$$\boxed{a = -\frac{1}{5}, \quad b = \frac{6}{5}.}$$

12) On retrouve donc

$$\boxed{u_n = -\frac{1}{5}3^n + \frac{6}{5}8^n.}$$

Puis, à partir de (*),

$$v_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - 5u_n).$$

Or

$$u_{n+1} = -\frac{1}{5}3^{n+1} + \frac{6}{5}8^{n+1} = -\frac{3}{5}3^n + \frac{48}{5}8^n.$$

Donc

$$u_{n+1} - 5u_n = \left(-\frac{3}{5}3^n + \frac{48}{5}8^n\right) - (-3^n + 6 \cdot 8^n) = \frac{2}{5}3^n + \frac{18}{5}8^n.$$

Ainsi

$$v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}3^n + \frac{18}{5}8^n\right) = \frac{1}{5}3^n + \frac{9}{5}8^n.$$

Donc

$$\boxed{v_n = \frac{1}{5}3^n + \frac{9}{5}8^n.}$$

Partie IV – Terme général à l'aide des puissances d'une matrice

On pose

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

13) (a) On a

$$MX_n = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_n + 2v_n \\ 3u_n + 6v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Donc

$$\boxed{X_{n+1} = MX_n.}$$

(b) Montrons par récurrence que $X_n = M^n X_0$.

Pour $n = 0$, $M^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$.

Supposons $X_n = M^n X_0$. Alors, d'après la question précédente,

$$X_{n+1} = MX_n = M(M^n X_0) = M^{n+1} X_0.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{X_n = M^n X_0.}$$

14) (a)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 22 \\ 33 & 42 \end{pmatrix}.$$

Ensuite,

$$M^2 - 11M + 24I_2 = \begin{pmatrix} 31 & 22 \\ 33 & 42 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 55 & 22 \\ 33 & 66 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On en déduit que

$$\boxed{P(X) = X^2 - 11X + 24}$$

est un polynôme annulateur de M .

- (c) Si λ est une valeur propre de M , alors toute valeur propre annule un polynôme annulateur de M . Donc

$$\lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0.$$

Ainsi les seules valeurs propres possibles sont

$$\boxed{3 \text{ et } 8.}$$

- 15) Vérifions :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 3.

De même,

$$M \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+6 \\ 6+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 8.

- 16) On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

- (a)

$$\det(P) = 1 \cdot 3 - 2(-1) = 5 \neq 0.$$

Donc P est inversible, et

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- (b) Les colonnes de P sont précisément les deux vecteurs propres trouvés à la question 15, dans le même ordre que les valeurs propres figurant dans D . Ainsi

$$MP = PD.$$

Comme P est inversible, on en déduit

$$M = PDP^{-1},$$

donc M est diagonalisable.

- (c) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = PD^nP^{-1}.$$

Pour $n = 0$, on a bien $M^0 = I_2 = PI_2P^{-1} = PD^0P^{-1}$.

Supposons $M^n = PD^nP^{-1}$. Alors

$$M^{n+1} = MM^n = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 17) (a) On a

$$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 8^n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après calcul,

$$\boxed{M^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + 2 \cdot 8^n & 2(8^n - 3^n) \\ 3(8^n - 3^n) & 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 8^n \end{pmatrix}.}$$

(b) Comme $X_n = M^n X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on obtient

$$X_n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + 2 \cdot 8^n & 2(8^n - 3^n) \\ 3(8^n - 3^n) & 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$u_n = \frac{1}{5} (3^{n+1} + 2 \cdot 8^n + 4(8^n - 3^n)) = -\frac{1}{5} 3^n + \frac{6}{5} 8^n,$$

et

$$v_n = \frac{1}{5} (3(8^n - 3^n) + 2(2 \cdot 3^n + 3 \cdot 8^n)) = \frac{1}{5} 3^n + \frac{9}{5} 8^n.$$

On retrouve bien

$$u_n = -\frac{1}{5} 3^n + \frac{6}{5} 8^n, \quad v_n = \frac{1}{5} 3^n + \frac{9}{5} 8^n.$$

Exercice 3

Pour $n = 4$, l'urne contient les jetons

$$(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4),$$

tous équiprobables. On note B le numéro bleu, R le numéro rouge, et $G = B - R$.

Partie I – Tirage d'un jeton dans l'urne dans le cas $n = 4$

- 1) Il y a bien $1+2+3+4 = 10$ jetons : pour chaque numéro bleu $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, il existe exactement k jetons possibles, portant les numéros rouges $1, 2, \dots, k$.
- 2) (a) Les valeurs prises par B sont

$$B(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Les valeurs prises par R sont aussi

$$R(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

- (b) L'événement $(B = 1) \cap (R = 1)$ correspond au seul jeton $(1, 1)$; comme il y a 10 jetons équiprobables,

$$\mathbb{P}((B = 1) \cap (R = 1)) = \frac{1}{10}.$$

L'événement $(B = 1) \cap (R = 2)$ est impossible, car aucun jeton n'a bleu 1 et rouge 2. Donc

$$\mathbb{P}((B = 1) \cap (R = 2)) = 0.$$

- (c) La loi conjointe du couple (B, R) est donnée par

$$\mathbb{P}(B = i, R = j) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq 4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le tableau correspondant est

	$B = 1$	$B = 2$	$B = 3$	$B = 4$
$R = 1$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$R = 2$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$R = 3$	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$R = 4$	0	0	0	$\frac{1}{10}$

3) (a) Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, il y a exactement i jetons dont le numéro bleu vaut i . Donc

$$\mathbb{P}(B = i) = \frac{i}{10} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

(b) Alors

$$\mathbb{E}(B) = \sum_{i=1}^4 i\mathbb{P}(B = i) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{10} = \frac{30}{10} = 3.$$

Ensuite

$$\mathbb{E}(B^2) = \sum_{i=1}^4 i^2\mathbb{P}(B = i) = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{10} = \frac{100}{10} = 10.$$

Donc

$$\mathbb{V}(B) = \mathbb{E}(B^2) - \mathbb{E}(B)^2 = 10 - 9 = 1.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(B) = 3, \quad \mathbb{V}(B) = 1.$$

4) (a) Pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, il y a exactement $5 - j$ jetons dont le numéro rouge vaut j . Donc

$$\mathbb{P}(R = j) = \frac{5 - j}{10} \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

(b) Alors

$$\mathbb{E}(R) = \sum_{j=1}^4 j\mathbb{P}(R = j) = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

De plus,

$$\mathbb{E}(R^2) = \frac{1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 1}{10} = \frac{50}{10} = 5.$$

Donc

$$\mathbb{V}(R) = \mathbb{E}(R^2) - \mathbb{E}(R)^2 = 5 - 4 = 1.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(R) = 2, \quad \mathbb{V}(R) = 1.$$

5) (a) D'après la loi conjointe,

$$\mathbb{E}(BR) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq 4} ij \cdot \frac{1}{10} = \frac{1 + 2 + 4 + 3 + 6 + 9 + 4 + 8 + 12 + 16}{10} = \frac{65}{10} = \frac{13}{2}.$$

(b) On rappelle la formule

$$\text{Cov}(B, R) = \mathbb{E}(BR) - \mathbb{E}(B)\mathbb{E}(R).$$

Ainsi

$$\text{Cov}(B, R) = \frac{13}{2} - 3 \cdot 2 = \frac{13}{2} - \frac{12}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\text{Cov}(B, R) = \frac{1}{2}.$$

(c) Si B et R étaient indépendantes, on aurait

$$\mathbb{P}(B = 1, R = 2) = \mathbb{P}(B = 1)\mathbb{P}(R = 2).$$

Or

$$\mathbb{P}(B = 1, R = 2) = 0 \quad \text{tandis que} \quad \mathbb{P}(B = 1)\mathbb{P}(R = 2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{100} \neq 0.$$

Donc

$$B \text{ et } R \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

6) Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(G) = \mathbb{E}(B - R) = \mathbb{E}(B) - \mathbb{E}(R) = 3 - 2 = 1.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(G) = 1.}$$

Partie II – Temps d'attente du premier et du second tirage du jeton numéroté 1 en bleu

On effectue maintenant des tirages *avec remise*. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement

S_k : "on obtient le jeton numéroté 1 en bleu lors du k -ième tirage".

7) Le seul jeton dont le numéro bleu vaut 1 est le jeton (1, 1). Donc

$$S_k = (B_k = 1) = (B_k = 1) \cap (R_k = 1).$$

À chaque tirage, la probabilité de tirer ce jeton est

$$\boxed{\mathbb{P}(S_k) = \frac{1}{10}.}$$

8) On note T_1 le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois le numéro 1 en bleu.

À chaque tirage, on a une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{10}$, indépendante des précédentes. Ainsi T_1 suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{10}$ sur \mathbb{N}^* :

$$\boxed{\mathbb{P}(T_1 = n) = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \frac{1}{10} \quad (n \geq 1).}$$

On en déduit

$$\boxed{\mathbb{E}(T_1) = \frac{1}{p} = 10, \quad \mathbb{V}(T_1) = \frac{1-p}{p^2} = 90.}$$

9) On note T_2 le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la seconde fois le numéro 1 en bleu.

On note aussi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, X_m le nombre de succès parmi les m premiers tirages.

(a) Il faut au minimum 2 tirages pour obtenir deux fois ce jeton. Donc

$$\boxed{T_2(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots\}.}$$

(b) Comme les tirages sont indépendants et que chaque tirage est un succès avec probabilité $\frac{1}{10}$, on a

$$\boxed{X_m \sim \mathcal{B}\left(m, \frac{1}{10}\right).}$$

(c) Pour $k \geq 2$, obtenir la seconde apparition du jeton bleu 1 au k -ième tirage signifie :

- il y a eu exactement un succès pendant les $k - 1$ premiers tirages ;
- le k -ième tirage est un succès.

Donc

$$\boxed{(T_2 = k) = (X_{k-1} = 1) \cap S_k.}$$

(d) Par indépendance de S_k avec les $k - 1$ premiers tirages,

$$\mathbb{P}(T_2 = k) = \mathbb{P}(X_{k-1} = 1)\mathbb{P}(S_k).$$

Or

$$\mathbb{P}(X_{k-1} = 1) = \binom{k-1}{1} \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{9}{10}\right)^{k-2}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(T_2 = k) = (k-1) \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{9}{10}\right)^{k-2} \times \frac{1}{10}.$$

Finalement, pour $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}(T_2 = k) = \frac{k-1}{100} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-2}.$$

Partie III – Une série statistique

La table `Partie` contient les attributs :

`IdPartie`, `NomJoueur`, `B`, `R`.

10) `NomJoueur` ne peut pas être choisi comme clé primaire, car un même joueur peut jouer plusieurs parties : cet attribut n'est donc pas forcément unique.

Un bon choix de clé primaire est

`IdPartie`

car il s'agit d'un identifiant unique.

11) Une requête possible est :

```
CREATE TABLE Partie (
  IdPartie INT PRIMARY KEY,
  NomJoueur TEXT,
  B INT,
  R INT
);
```

12) La requête demandée est :

```
SELECT DISTINCT NomJoueur
FROM Partie
WHERE B = 1;
```

Le mot-clé `DISTINCT` permet de ne renvoyer chaque nom qu'une seule fois.

Fin de la correction