

Correction détaillée

BCE – ESCP BS – Mathématiques T – Voie technologique
Sujet 2026

Note préalable. Le PDF transmis s'interrompait matériellement après la question 57. La fin de l'exercice 3 (questions 58 à 61) a été reconstituée à partir de la dernière page photographiée du sujet complet.

Exercice 1

On pose

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On admet que

$$R(X) = (X^2 - 4)(X - 2) = (X - 2)^2(X + 2)$$

est un polynôme annulateur de M .

Partie I – Spectre et inversibilité de M

1.. Les racines de R sont 2 (racine double) et -2 .

2.. Toute valeur propre éventuelle de M est racine d'un polynôme annulateur de M . Les seules valeurs propres possibles sont donc

$$\boxed{-2 \text{ et } 2.}$$

3.. On calcule directement :

$$MU = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2U,$$

$$MV = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2V.$$

Ainsi, U est vecteur propre associé à -2 et V est vecteur propre associé à 2 .

4.. D'après la question 2, les seules valeurs propres possibles sont -2 et 2 ; d'après la question 3, ces deux valeurs sont effectivement valeurs propres de M . Donc

$$\boxed{\text{Sp}(M) = \{-2, 2\}.}$$

5.. Comme $R(M) = 0$, on a

$$M^3 - 2M^2 - 4M + 8I_3 = 0,$$

donc

$$M(M^2 - 2M - 4I_3) = -8I_3.$$

Ainsi M possède un inverse, donné par

$$M^{-1} = -\frac{1}{8}(M^2 - 2M - 4I_3).$$

En particulier,

$$\boxed{M \text{ est inversible.}}$$

Partie II – Détermination des puissances entières positives de T

6.. On calcule :

$$T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + N.$$

7.. Un calcul immédiat donne

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = O_3.$$

8.. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^{2n} = (T^2)^n = (I_3 + N)^n.$$

Comme $N^2 = O_3$, la formule du binôme donne

$$(I_3 + N)^n = I_3 + nN.$$

Donc

$$\boxed{T^{2n} = I_3 + nN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.. On écrit

$$T^{2n+1} = T^{2n}T = (I_3 + nN)T.$$

D'où

$$T^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & n \\ 0 & 1 & 1+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\boxed{T^{2n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & n \\ 0 & 1 & 1+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie III – Détermination des puissances entières de T

10.. La matrice T est triangulaire supérieure ; son déterminant vaut le produit de ses coefficients diagonaux :

$$\det(T) = (-1) \times 1 \times 1 = -1 \neq 0.$$

Donc T est inversible. On résout $TT^{-1} = I_3$ ou on calcule directement :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.. On calcule

$$(T^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 - N.$$

12.. Comme $(T^{-1})^2 = I_3 - N$ et $N^2 = O_3$,

$$(T^{-1})^{2n} = (I_3 - N)^n = I_3 - nN.$$

Donc

$$(T^{-1})^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$(T^{-1})^{2n+1} = (T^{-1})^{2n}T^{-1} = (I_3 - nN)T^{-1},$$

soit

$$(T^{-1})^{2n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -(n+1) \\ 0 & 1 & -(2n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$(T^{-1})^k = (T^k)^{-1}.$$

— Pour $k = 0$, c'est clair : $(T^{-1})^0 = I_3 = (T^0)^{-1}$.

— Supposons la propriété vraie au rang k . Alors

$$(T^{-1})^{k+1} = (T^{-1})^k T^{-1} = (T^k)^{-1} T^{-1} = (TT^k)^{-1} = (T^{k+1})^{-1}.$$

La propriété est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note désormais cette matrice T^{-k} .

14.. Les formules obtenues pour les puissances positives et négatives se rassemblent en une seule écriture valable pour tout $j \in \mathbb{Z}$:

$$T^{2j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & j \\ 0 & 1 & 2j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$T^{2j+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & j \\ 0 & 1 & 1+2j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie IV – Détermination des puissances entières de M

15.. On calcule

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Donc

$$\boxed{P \text{ est inversible.}}$$

16.. On obtient

$$MP = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$PT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On remarque alors que

$$MP = 2PT.$$

17.. Comme $MP = 2PT$ et P est inversible,

$$M = 2PTP^{-1}.$$

Ainsi

$$\boxed{a = 2.}$$

18.. De la relation précédente, on déduit en inversant :

$$M^{-1} = (2PTP^{-1})^{-1} = \frac{1}{2} PT^{-1}P^{-1}.$$

Donc

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{2} PT^{-1}P^{-1}.}$$

19.. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\mathcal{P}(n) : \quad M^n = 2^n PT^n P^{-1} \quad \text{et} \quad (M^{-1})^n = \frac{1}{2^n} PT^{-n} P^{-1}.$$

— **Initialisation.** Pour $n = 0$,

$$M^0 = I_3 = PP^{-1} = 2^0 PT^0 P^{-1}$$

et

$$(M^{-1})^0 = I_3 = PP^{-1} = \frac{1}{2^0} PT^0 P^{-1}.$$

— **Hérédité.** Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors

$$M^{n+1} = M^n M = 2^n PT^n P^{-1} \cdot 2PTP^{-1} = 2^{n+1} PT^{n+1} P^{-1}.$$

De même,

$$(M^{-1})^{n+1} = (M^{-1})^n M^{-1} = \frac{1}{2^n} PT^{-n} P^{-1} \cdot \frac{1}{2} PT^{-1} P^{-1} = \frac{1}{2^{n+1}} PT^{-(n+1)} P^{-1}.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

On considère une collection de n cartes différentes et, pour $j \in \{1, \dots, n\}$, N_j désigne le nombre d'achats nécessaires pour obtenir j cartes différentes. La variable X_k désigne le nombre d'achats nécessaires pour passer de $k - 1$ cartes différentes à k cartes différentes.

On pose, pour tout $j \geq 1$,

$$H_j = \sum_{k=1}^j \frac{1}{k}, \quad u_j = H_j - \ln(j), \quad f(x) = \ln(1+x) - x.$$

Partie I – Étude préliminaire de la suite $(u_j)_{j \geq 1}$

20.. Pour que $f(x) = \ln(1+x) - x$ soit définie, il faut et il suffit que $1+x > 0$, soit

$$\boxed{D =]-1, +\infty[.}$$

21.. Pour $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$

Comme $1+x > 0$ sur D , le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$:

- $f'(x) > 0$ sur $] -1, 0[$;
- $f'(0) = 0$;
- $f'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, f est croissante sur $] -1, 0[$, décroissante sur $]0, +\infty[$ et admet en 0 un maximum égal à

$$f(0) = \ln(1) - 0 = 0.$$

22.. D'après la question précédente, le maximum de f sur son domaine vaut 0. Donc, pour tout $x \in D$,

$$f(x) \leq 0.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\forall x \in D, \ln(1+x) \leq x.}$$

23.. Pour tout $j \geq 1$,

$$u_{j+1} - u_j = (H_{j+1} - \ln(j+1)) - (H_j - \ln j) = \frac{1}{j+1} + \ln\left(\frac{j}{j+1}\right).$$

Donc

$$\boxed{u_{j+1} - u_j = \frac{1}{j+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{j+1}\right).}$$

24.. En appliquant la question 22 à

$$x = -\frac{1}{j+1} \in]-1, +\infty[,$$

on obtient

$$\ln\left(1 - \frac{1}{j+1}\right) \leq -\frac{1}{j+1}.$$

Ainsi

$$\nu_{j+1} - \nu_j \leq 0.$$

Donc la suite $(\nu_j)_{j \geq 1}$ est décroissante.

25.. La fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Donc, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, il vient

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}.$$

D'où

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt.$$

26.. Pour tout $j \geq 1$,

$$\ln(j) = \int_1^j \frac{1}{t} dt = \sum_{k=1}^{j-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^j \frac{1}{k} = H_j.$$

Ainsi,

$$\nu_j = H_j - \ln(j) \geq 0.$$

La suite (ν_j) est donc positive.

27.. La suite (ν_j) est décroissante d'après la question 24 et minorée par 0 d'après la question 26. Elle converge donc.

28.. Soit $\ell = \lim_{j \rightarrow +\infty} \nu_j \in \mathbb{R}$. On a

$$H_n = \ln(n) + \nu_n.$$

En divisant par $\ln(n)$ (pour $n \geq 2$),

$$\frac{H_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{\nu_n}{\ln(n)}.$$

Comme (ν_n) converge, elle est bornée, donc $\nu_n/\ln(n) \rightarrow 0$. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1.$$

Partie II – Temps moyen pour obtenir la totalité de la collection

29.. Pour compléter la collection, il faut successivement passer de 0 à 1 carte différente, puis de 1 à 2, etc., jusqu'à n . Le nombre total d'achats est donc la somme des nombres d'achats nécessaires à chacun de ces passages :

$$N_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

30.. Le premier achat donne forcément une nouvelle carte. Donc

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1.$$

La loi de X_1 est donc certaine en 1, et

$$\mathbb{E}(X_1) = 1, \quad \mathbb{V}(X_1) = 0.$$

31.. Après le premier achat, on possède exactement une carte. Il reste donc $n - 1$ cartes nouvelles possibles parmi les n cartes de la collection. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\text{obtenir une carte différente au deuxième achat}) = \frac{n-1}{n}.$$

32.. Pour obtenir une deuxième carte différente, chaque achat est un succès avec probabilité

$$p = \frac{n-1}{n}.$$

La variable X_2 suit donc une loi géométrique de paramètre p sur \mathbb{N}^* :

$$\mathbb{P}(X_2 = r) = \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^{r-1} \frac{n-1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{r-1} \frac{n-1}{n}, \quad r \geq 1.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{p} = \frac{n}{n-1}$$

et

$$\mathbb{V}(X_2) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{n}{(n-1)^2}.$$

33.. Si l'on possède déjà $k - 1$ cartes différentes, il reste

$$n - (k - 1) = n - k + 1$$

cartes nouvelles possibles. Lors d'un achat, la probabilité d'obtenir une nouvelle carte vaut donc

$$p_{n,k} = \frac{n - k + 1}{n}.$$

34.. Tant que l'on n'a pas obtenu la k -ième carte différente, chaque achat constitue une expérience indépendante dont le succès est : « obtenir une nouvelle carte », avec probabilité $p_{n,k}$. La variable X_k compte le nombre d'achats nécessaires jusqu'au premier succès. Donc

$$X_k \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p_{n,k}.$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{p_{n,k}} = \frac{n}{n - k + 1}.$$

35.. D'après la question 29,

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n - k + 1}.$$

En posant $j = n - k + 1$, on obtient

$$\mathbb{E}(N_n) = n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = nH_n.$$

Ainsi,

$$\frac{\mathbb{E}(N_n)}{n \ln(n)} = \frac{H_n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

par la question 28. Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(N_n)}{n \ln(n)} = 1.}$$

Interprétation : lorsque n est grand, le nombre moyen d'achats nécessaires pour compléter la collection est asymptotiquement équivalent à $n \ln(n)$.

Partie III – Suivi jour par jour : SQL

36.. Comme l'enfant n'achète *au maximum qu'une seule carte par jour*, la date suffit à identifier univoquement un achat. On peut donc choisir

Date

comme clé primaire de la table CARTES.

37.. La requête SQL demandée est, par exemple :

```
SELECT DISTINCT Nom
FROM CARTES;
```

38.. Une requête convenable est :

```
SELECT Nom
FROM POKEMON
WHERE PV >= 100;
```

39.. Il faut joindre les deux tables sur l'attribut Nom :

```
SELECT C.Nom, C.Date, C.Lieu
FROM CARTES AS C
JOIN POKEMON AS P
  ON C.Nom = P.Nom
WHERE P.Energie = 'feu';
```

Toute requête SQL équivalente était acceptée.

Exercice 3

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} Me^{-a(x-m)} & \text{si } x \geq m, \\ Me^{b(x-m)} & \text{si } x < m, \end{cases} \quad a > 0, b > 0.$$

Partie I – Représentation graphique d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on prend $m = 0$, $M = \frac{2}{3}$, $a = 1$ et $b = 2$; ainsi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{2}{3}e^{2x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

40.. La courbe admet un maximum en $x = 0$ de valeur $f(0) = \frac{2}{3}$. Elle est :

- croissante sur $[-1, 0]$ car $x \mapsto \frac{2}{3}e^{2x}$ est croissante ;
- décroissante sur $[0, 1]$ car $x \mapsto \frac{2}{3}e^{-x}$ est décroissante.

Quelques points utiles :

$$f(-1) = \frac{2}{3}e^{-2} \approx 0,09, \quad f(0) = \frac{2}{3} \approx 0,67, \quad f(1) = \frac{2}{3}e^{-1} \approx 0,27.$$

L'allure demandée est donc une courbe en « pointe douce » au point $(0, 2/3)$, montant à gauche puis redescendant à droite.

41.. Une complétion possible est :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def f(x):
    if x < 0:
        return (2/3)*np.exp(2*x)
    else:
        return (2/3)*np.exp(-x)
```

```
A = np.linspace(-1,1,1000)
B = np.zeros(1000)
for k in range(1000):
    B[k] = f(A[k])
```

```
plt.plot(A,B)
```

Partie II – Étude d'une variable aléatoire X et de son opposé $-X$

42.. Pour que f soit une densité, il faut et il suffit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = M \int_{-\infty}^m e^{b(x-m)} dx + M \int_m^{+\infty} e^{-a(x-m)} dx.$$

En posant $u = x - m$, on obtient

$$\int_{-\infty}^m e^{b(x-m)} dx = \int_{-\infty}^0 e^{bu} du = \frac{1}{b}, \quad \int_m^{+\infty} e^{-a(x-m)} dx = \int_0^{+\infty} e^{-au} du = \frac{1}{a}.$$

Ainsi

$$M \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1,$$

soit

$$M = \frac{ab}{a+b}.$$

Dans la suite, on prend cette valeur de M .

43.. Pour $x < m$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{ab}{a+b} \int_{-\infty}^x e^{b(t-m)} dt = \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{1}{b} e^{b(x-m)}.$$

Donc

$$F_X(x) = \frac{a}{a+b} e^{b(x-m)} \quad (x < m).$$

Pour $x \geq m$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^m f(t) dt + \int_m^x f(t) dt.$$

Le premier terme vaut

$$\int_{-\infty}^m f(t) dt = \frac{a}{a+b}.$$

De plus,

$$\int_m^x f(t) dt = \frac{ab}{a+b} \int_m^x e^{-a(t-m)} dt = \frac{b}{a+b} \left(1 - e^{-a(x-m)} \right).$$

Ainsi

$$F_X(x) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \left(1 - e^{-a(x-m)} \right) = 1 - \frac{b}{a+b} e^{-a(x-m)}.$$

Donc

$$F_X(x) = 1 - \frac{b}{a+b} e^{-a(x-m)} \quad (x \geq m).$$

44.. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{-X}(x) = \mathbb{P}(-X \leq x) = \mathbb{P}(X \geq -x) = 1 - F_X(-x),$$

car X est une variable à densité.

— Si $x \leq -m$, alors $-x \geq m$, donc

$$F_X(-x) = 1 - \frac{b}{a+b} e^{-a((-x)-m)} = 1 - \frac{b}{a+b} e^{a(x+m)}.$$

Par conséquent,

$$F_{-X}(x) = \frac{b}{a+b} e^{a(x+m)} \quad (x \leq -m).$$

— Si $x > -m$, alors $-x < m$, donc

$$F_X(-x) = \frac{a}{a+b} e^{b((-x)-m)} = \frac{a}{a+b} e^{-b(x+m)}.$$

Ainsi,

$$F_{-X}(x) = 1 - \frac{a}{a+b} e^{-b(x+m)} \quad (x > -m).$$

45.. On compare avec la forme générale d'une loi de Laplace asymétrique. Les expressions obtenues à la question 44 sont celles d'une loi de paramètres

$$-m, b, a.$$

Autrement dit,

$$-X \sim \mathcal{L}(-m, b, a).$$

Partie III – Première méthode de simulation de X

On suppose ici que $a = b$, donc $X \sim \mathcal{L}(m, a, a)$.

46.. Si $y < 0$, l'événement $|X - m| \leq y$ est impossible. Donc

$$F_Y(y) = 0 \quad (y < 0).$$

47.. Si $y \geq 0$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(|X - m| \leq y) = \mathbb{P}(m - y \leq X \leq m + y).$$

Comme X admet une densité,

$$F_Y(y) = F_X(m + y) - F_X(m - y).$$

Autrement dit,

$$F_Y(y) = F_X(y + m) - F_X(-y + m) \quad (y \geq 0).$$

48.. Comme $a = b$, les formules de la question 43 donnent, pour $y \geq 0$,

$$F_X(m + y) = 1 - \frac{1}{2}e^{-ay}, \quad F_X(m - y) = \frac{1}{2}e^{-ay}.$$

Donc

$$F_Y(y) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-ay}\right) - \frac{1}{2}e^{-ay} = 1 - e^{-ay}.$$

Ainsi,

$$Y \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } a.$$

49.. Comme X est symétrique par rapport à m dans le cas $a = b$,

$$\mathbb{P}(X > m) = \frac{1}{2}.$$

On peut aussi le lire sur la fonction de répartition : $F_X(m) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = m) = 0$.

50.. Le programme réalise 1000 simulations indépendantes d'une variable aléatoire

$$X \sim \mathcal{L}(2, 1, 1).$$

En effet, lorsque $a = 1$, la variable Y générée par `rd.exponential(1)` suit bien une loi exponentielle de paramètre 1, puis on lui affecte aléatoirement le signe + ou - avec probabilité 1/2, avant de translater de 2.

La quantité affichée,

$$\frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} \text{Mystere}[k],$$

est donc la moyenne empirique de 1000 simulations de X . Cette valeur vaut environ 2,024, ce qui est cohérent avec le fait que

$$\mathbb{E}(X) = 2.$$

Le résultat affiché est donc une approximation numérique de l'espérance de X .

Partie IV – Seconde méthode de simulation de X

51.. Sur $] - \infty, m[$, d'après la question 43,

$$F_X(x) = \frac{a}{a+b} e^{b(x-m)}.$$

Cette fonction est continue et strictement croissante sur $] - \infty, m[$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow m^-} F_X(x) = \frac{a}{a+b}.$$

Ainsi,

$$F_X \text{ réalise une bijection de }] - \infty, m[\text{ sur } \left] 0, \frac{a}{a+b} \right[.$$

52.. Soit $y \in \left] 0, \frac{a}{a+b} \right[$. On résout l'équation

$$y = \frac{a}{a+b} e^{b(x-m)}.$$

On obtient

$$e^{b(x-m)} = \frac{a+b}{a} y, \quad b(x-m) = \ln\left(\frac{a+b}{a} y\right),$$

donc

$$F_1(y) = m + \frac{1}{b} \ln\left(\frac{a+b}{a} y\right).$$

53.. Si U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, sa fonction de répartition est

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

54.. Soit $t < m$. Si $U \geq \frac{a}{a+b}$, alors $T = F_2(U) \geq m > t$, donc l'événement $(T \leq t)$ est impossible sur cette branche.

Si au contraire $U < \frac{a}{a+b}$, alors $T = F_1(U)$. Comme F_1 est croissante,

$$T \leq t \iff F_1(U) \leq t \iff U \leq F_X(t).$$

On en déduit bien

$$\text{si } t < m, \quad \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(U \leq F_X(t)).$$

55.. Si $t < m$, alors $F_X(t) \in \left] 0, \frac{a}{a+b} \right[\subset]0, 1[$, donc par la question 53,

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(U \leq F_X(t)) = F_U(F_X(t)) = F_X(t).$$

Si $t \geq m$, on admet que

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(U > F_X(t)).$$

Comme $F_X(t) \in [0, 1]$, on a

$$1 - F_T(t) = 1 - F_U(F_X(t)) = 1 - F_X(t),$$

donc encore $F_T(t) = F_X(t)$.

Ainsi,

$$F_T = F_X.$$

Les variables aléatoires T et X ont donc la même loi.

56.. Une complétion possible est :

```
import numpy
import numpy.random as rd

def Simu2_X(m,a,b):
    U = rd.random()
    if U < a/(a+b):
        X = m + numpy.log((a+b)*U/a)/b
    else:
        X = m - numpy.log((a+b)*(1-U)/b)/a
    return X
```

Partie V – Étude d’une suite de variables aléatoires suivant des lois de Laplace

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que

$$X_n \sim \mathcal{L}(0, 2^n, 2^n).$$

Une densité de X_n est donc

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2^n}{2} e^{-2^n x} & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{2^n}{2} e^{2^n x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On définit

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

57.. On admet le résultat intermédiaire demandé dans l’énoncé : pour $\lambda > 0$,

$$\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^3}.$$

Dans les questions 58 à 60, n désigne un entier naturel non nul.

58.. Étudions l’espérance de X_n . Sur \mathbb{R} , la fonction $x \mapsto x f_n(x)$ est impaire, car f_n est paire. De plus,

$$\int_0^{+\infty} x f_n(x) dx = \frac{2^n}{2} \int_0^{+\infty} x e^{-2^n x} dx.$$

Par la question 57,

$$\int_0^{+\infty} x e^{-2^n x} dx = \frac{1}{(2^n)^2} = 2^{-2n},$$

donc

$$\int_0^{+\infty} x f_n(x) dx = \frac{2^n}{2} \cdot 2^{-2n} = 2^{-n-1} < +\infty.$$

L’espérance existe. Comme l’intégrande est impaire, le résultat (R2) donne

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx = 0.$$

59.. Cette fois, $x \mapsto x^2 f_n(x)$ est paire. De plus,

$$\int_0^{+\infty} x^2 f_n(x) dx = \frac{2^n}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2^n x} dx.$$

Par la question 57,

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2^n x} dx = \frac{2}{(2^n)^3} = 2^{1-3n}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} x^2 f_n(x) dx = \frac{2^n}{2} \cdot 2^{1-3n} = 2^{-2n}.$$

Le résultat (R2) donne alors

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 f_n(x) dx = 2^{1-2n}.$$

Comme $\mathbb{E}(X_n) = 0$, on obtient

$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = 2^{1-2n}.$$

60.. Les variables X_1, \dots, X_n admettent une espérance et une variance. Donc \bar{X}_n aussi, avec

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = 0.$$

Par indépendance et d'après (R1),

$$\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 2^{1-2k}.$$

Cette somme est géométrique :

$$\sum_{k=1}^n 2^{1-2k} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k = 2 \cdot \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} (1 - 4^{-n}).$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(\bar{X}_n) = 0, \quad \mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{2}{3n^2} (1 - 4^{-n}).}$$

61.. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = n \mathbb{V}(\bar{X}_n).$$

En utilisant la question 60,

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq n \cdot \frac{2}{3n^2} (1 - 4^{-n}) = \frac{2}{3n} (1 - 4^{-n}).$$

Le majorant tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.}$$

FIN