Correction détaillée

CCINP - Filière MP - Mathématiques 1

Session 2026

Cette correction est rédigée dans un style sobre et rigoureux, adapté au niveau MP. Les raisonnements sont détaillés, mais l'on cherche à rester efficace sur les points de calcul standard.

Exercice I - Requêtes SQL

On note :

— `ELEVES(id, nom, prenom, email, promo)` ;

— `PAIEMENTS(id, id_eleve, montant, date_paiement)`.

Q1. Emails distincts des élèves qui ne sont pas de la promotion 2025

Il suffit de sélectionner les adresses mail, puis d'éliminer les doublons avec `DISTINCT`.

```sql
SELECT DISTINCT email
FROM ELEVES
WHERE promo <> 2025;
```

Q2. Nom, prénom et montant total payé pour chaque élève

Pour obtenir un total par élève, on effectue une jointure entre les deux tables puis un `GROUP BY`. Le choix d'une `LEFT JOIN` permet de conserver aussi les élèves n'ayant encore effectué aucun paiement, avec un total égal à 0.

```sql
SELECT e.nom,
       e.prenom,
       COALESCE(SUM(p.montant), 0) AS total_paye
FROM ELEVES e
LEFT JOIN PAIEMENTS p
       ON p.id_eleve = e.id
GROUP BY e.id, e.nom, e.prenom
ORDER BY e.nom, e.prenom;
```

Q3. Doublons dans la table `ELEVES`

On veut retrouver les lignes qui ont au moins une autre ligne identique pour les champs `nom`, `prenom`, `email` et `promo`, avec un identifiant différent.

```sql
SELECT e.id, e.email
FROM ELEVES e
WHERE EXISTS (
    SELECT 1
    FROM ELEVES e2
    WHERE e2.id <> e.id
      AND e2.nom = e.nom
      AND e2.prenom = e.prenom
      AND e2.email = e.email
      AND e2.promo = e.promo
);
```

Cette requête renvoie *toutes* les lignes appartenant à un groupe de doublons.

Q4. Identifiants des élèves n'ayant effectué aucun paiement

La formulation la plus directe consiste a utiliser `NOT EXISTS`.

```
SELECT e.id
FROM ELEVES e
WHERE NOT EXISTS (
    SELECT 1
    FROM PAIEMENTS p
    WHERE p.id_eleve = e.id
);
```

Exercice II - Fonction generatrice d'une variable aleatoire a valeurs dans $\mathbb{N}$

On pose, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n.$$

Q5. Montrer que G_X est bien définie sur $[-1, 1]$

Soit $t \in [-1, 1]$. Alors $|t| \leq 1$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n)t^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1.$$

La série définissant $G_X(t)$ converge donc absolument. Ainsi $G_X(t)$ est bien définie pour tout $t \in [-1, 1]$.

Q6. Cas d'une loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Ainsi,

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}.$$

Donc

$$\boxed{G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}}$$

Q7. Fonction generatrice d'une somme de variables independantes

Soient X et Y independantes, a valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit $t \in]-1, 1[$. Les deux séries définissant $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ convergent absolument. On peut donc former leur produit de Cauchy :

$$G_X(t)G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k) \right) t^n.$$

Or, par independance,

$$\mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k),$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \mathbb{P}(X + Y = n).$$

Ainsi,

$$G_X(t)G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X + Y = n)t^n = G_{X+Y}(t).$$

Donc

$$\boxed{\forall t \in]-1,1[, \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).}$$

Q8. Somme de deux lois de Poisson independantes

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont independantes, alors d'apres les questions precedentes,

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

Or c'est precisement la fonction generatrice d'une loi de Poisson de parametre $\lambda + \mu$.

$$\boxed{X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu).}$$

Problème - Partie I : calcul d'une intégrale

Pour $x > 0$, on pose

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2} e^{it}\, dt.$$

Il est commode d'introduire le noyau

$$K(x,t) = \frac{x}{x^2+t^2}.$$

Q9. Montrer que g est bien définie sur $]0, +\infty[$

Pour tout $x > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{x}{x^2+t^2} e^{it} \right| = \frac{x}{x^2+t^2}.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\, du \qquad (t = xu) = \pi.$$

L'intégrale converge donc absolument. Ainsi $g(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.

Q10. Montrer que $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{ixu}}{1+u^2}\, du$

En effectuant le changement de variable $t = xu$ (donc $dt = x\, du$), on obtient

$$K(x,t)e^{it}\, dt = \frac{x}{x^2+x^2u^2} e^{ixu}\, x\, du = \frac{e^{ixu}}{1+u^2}\, du.$$

Donc

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2}\, du.$$

Par conséquent,

$$|g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{ixu}|}{1+u^2}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi.$$

Ainsi g est bornee sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\forall x > 0, \quad |g(x)| \leq \pi.}$$

Q11. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \pi$

Avec l'expression precedente, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^{ixu}}{1+u^2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{1+u^2}.$$

De plus,

$$\left|\frac{e^{ixu}}{1+u^2}\right| = \frac{1}{1+u^2},$$

et la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi.$$

Q12. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$

On travaille sur un segment arbitraire $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Pour tout $(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x,t) = \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) = \frac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3}.$$

Comme $|e^{it}| = 1$, on majore directement les dérivées de l'intégrande.

D'une part,

$$\left|\frac{\partial K}{\partial x}(x,t)e^{it}\right| \leq \frac{|t^2-x^2|}{(x^2+t^2)^2} \leq \frac{x^2+t^2}{(x^2+t^2)^2} = \frac{1}{x^2+t^2} \leq \frac{1}{a^2+t^2},$$

et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{a^2+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'autre part,

$$\left|\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t)e^{it}\right| \leq \frac{2b(x^2+3t^2)}{(x^2+t^2)^3} \leq \frac{6b}{(x^2+t^2)^2} \leq \frac{6b}{(a^2+t^2)^2},$$

et $t \mapsto \dfrac{1}{(a^2+t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On peut donc dériver sous le signe intégral une fois puis deux fois. Il en résulte que $g \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$.

Q13. Calculer $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{x}{x^2+t^2}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{x}{x^2+t^2}\right)$ et en deduire l'equation differentielle satisfaite par g

On a déjà calculé

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) = \frac{2x(x^2-3t^2)}{(x^2+t^2)^3}.$$

De meme,

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x,t) = -\frac{2xt}{(x^2+t^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) = \frac{2x(3t^2-x^2)}{(x^2+t^2)^3}.$$

En additionnant,

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) = 0.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\forall (x,t) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \quad K_{xx}(x,t) + K_{tt}(x,t) = 0.}$$

Par la question precedente,

$$g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{xx}(x,t)e^{it}\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} K_{tt}(x,t)e^{it}\,dt.$$

On intègre alors par parties deux fois en t. Les termes de bord sont nuls car

$$K(x,t) \xrightarrow[|t|\to+\infty]{} 0, \qquad K_t(x,t) = -\frac{2xt}{(x^2+t^2)^2} \xrightarrow[|t|\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} K_{tt}(x,t)e^{it}\,dt &= \Big[K_t(x,t)e^{it}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - i\int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x,t)e^{it}\,dt \\ &= -i\left(\Big[K(x,t)e^{it}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - i\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,t)e^{it}\,dt\right) \\ &= -g(x).\end{aligned}$$

Par suite,

$$g''(x) = -(-g(x)) = g(x).$$

Donc g est solution de l'equation differentielle

$$\boxed{y''-y=0 \quad \text{sur }]0,+\infty[.}$$

Q14. Determiner une expression de $g(x)$ pour $x>0$

La solution generale de $y''-y=0$ sur $]0,+\infty[$ est

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}.$$

Or, d'apres la question Q10, la fonction g est bornee sur $]0,+\infty[$. Cela impose $A=0$. Donc

$$g(x) = Be^{-x}.$$

Enfin, d'apres la question Q11,

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = B = \pi.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x>0, \quad g(x) = \pi e^{-x}.}$$

Problème - Partie II : formule sommatoire de Poisson

Dans toute cette partie,

$$\forall t\in\mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{1}{1+t^2},$$

et

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n).$$

On peut aussi ecrire formellement

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

Q15. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique

Soit $x\in\mathbb{R}$ fixe. Pour $n>|x|+1$, on a

$$|x\pm n| \geq n-|x|,$$

donc

$$0 \leq f(x \pm n) = \frac{1}{1 + (x \pm n)^2} \leq \frac{1}{(n - |x|)^2}.$$

Comme la série de Riemann de terme général $1/n^2$ converge, les deux séries definissant $F(x)$ convergent. Ainsi F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned} F(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+1+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x+1-n) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} f(x+m) + \sum_{m=0}^{+\infty} f(x-m) \\ &= F(x), \end{aligned}$$

ou l'on a simplement change d'indice ($m = n + 1$ dans la première somme, $m = n - 1$ dans la seconde). Donc F est 1-périodique.

Q16. Montrer que F est continue sur $[0, 1]$ et en deduire que F est continue sur $\mathbb{R}$

Sur $[0, 1]$, on a pour $n \geq 0$,

$$0 \leq f(x+n) \leq \frac{1}{1+n^2}.$$

De plus, pour $n \geq 2$,

$$0 \leq f(x-n) \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Les séries numériques

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$$

convergent. Par le critère de Weierstrass, les séries de fonctions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) \qquad \text{et} \qquad f(x-1) + \sum_{n=2}^{+\infty} f(x-n)$$

convergent uniformément sur $[0, 1]$.

Comme chaque terme est continu, la somme F est continue sur $[0, 1]$.

Enfin, F est 1-périodique. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x_0 - m \in [0, 1]$; or $F(x) = F(x - m)$. La continuité de F en x_0 se déduit donc de celle de F en $x_0 - m$. Ainsi F est continue sur $\mathbb{R}$.

Q17. Montrer que $c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi kt}\,dt$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Par definition,

$$c_k(F) = \int_0^1 F(t)e^{-2i\pi kt}\,dt.$$

Sur $[0, 1]$, les séries qui définissent F convergent uniformément, donc on peut intégrer terme à terme :

$$c_k(F) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)e^{-2i\pi kt}\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f(t-n)e^{-2i\pi kt}\,dt.$$

Dans la première somme, on pose $u = t + n$; dans la seconde, $u = t - n$. Comme $k \in \mathbb{Z}$, on a $e^{-2i\pi kn} = 1$, d'où

$$c_k(F) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u)e^{-2i\pi ku}\,du + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-n}^{1-n} f(u)e^{-2i\pi ku}\,du.$$

Les intervalles $[n, n+1]$ $(n \geq 0)$ et $[-n, 1-n]$ $(n \geq 1)$ forment une partition de $\mathbb{R}$. On obtient donc

$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi ku}\,du.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi kt}}{1+t^2}\,dt.}$$

Q18. Calculer $\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t}\,dt$ pour $k, n \in \mathbb{Z}$

Si $n + k = 0$, l'intégrande vaut identiquement 1, donc

$$\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t}\,dt = 1.$$

Si $n + k \neq 0$, alors

$$\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t}\,dt = \left[\frac{e^{-2i\pi(n+k)t}}{-2i\pi(n+k)}\right]_0^1 = \frac{e^{-2i\pi(n+k)} - 1}{-2i\pi(n+k)} = 0,$$

car $e^{-2i\pi(n+k)} = 1$.

Donc

$$\boxed{\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t}\,dt = \begin{cases} 1, & \text{si } n+k=0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Problème - Partie III : applications

Q19. Calculer $c_0(F)$ puis $c_k(F)$ pour $k > 0$

Pour $k = 0$, la question Q17 donne

$$c_0(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Soit maintenant $k > 0$. Toujours d'apres Q17,

$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi kt}}{1+t^2}\,dt.$$

Par le changement de variable $t \mapsto -t$ et l'evenite de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$,

$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi kt}}{1+t^2}\,dt.$$

En comparant avec la fonction g de la partie I, on reconnait

$$c_k(F) = g(2\pi k).$$

La question Q14 donne alors

$$c_k(F) = \pi e^{-2\pi k}.$$

Ainsi,

$$\boxed{c_0(F) = \pi, \qquad \forall k \geq 1, \quad c_k(F) = \pi e^{-2\pi k}.}$$

On admet en outre que $c_{-k}(F) = c_k(F)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Q20. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique

On pose

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F)e^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F)e^{-2i\pi nx}.$$

Avec le resultat de Q19, cela s'ecrit

$$G(x) = \pi + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n}e^{2i\pi nx} + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n}e^{-2i\pi nx}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\pi e^{-2\pi n}e^{\pm 2i\pi nx}\right| = \pi e^{-2\pi n},$$

et la serie geometrique $\sum_{n\geq 1} \pi e^{-2\pi n}$ converge. Les deux séries convergent donc normalement sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, G est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme uniforme de fonctions continues. De plus, chaque terme est 1-périodique, donc G l'est également.

Q21. Montrer que $F = G$

Les fonctions F et G sont continues et 1-périodiques. Il suffit donc, d'après le résultat admis dans l'énoncé, de vérifier que leurs coefficients de Fourier complexes coïncident.

Comme les séries definissant G convergent normalement sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer terme à terme : pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_k(G) &= \int_0^1 G(t)e^{-2i\pi kt}\,dt \\ &= c_0(F)\int_0^1 e^{-2i\pi kt}\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(F)\int_0^1 e^{-2i\pi(k-n)t}\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F)\int_0^1 e^{-2i\pi(k+n)t}\,dt. \end{aligned}$$

D'apres la question Q18 :

— si $k = 0$, seul le terme constant subsiste et $c_0(G) = c_0(F)$;
— si $k > 0$, seul le terme $n = k$ de la première serie subsiste, donc $c_k(G) = c_k(F)$;
— si $k < 0$, seul le terme $n = -k$ de la seconde serie subsiste, donc $c_k(G) = c_k(F)$.

On a donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(G) = c_k(F).$$

Le resultat d'unicite admis dans l'enonce donne alors

$$\boxed{F = G.}$$

Q22. En deduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Comme $F = G$, on obtient d'abord la serie de Fourier explicite

$$F(x) = \pi + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n}e^{2i\pi nx} + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n}e^{-2i\pi nx}.$$

Donc

$$F(x) = \pi + 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n}\cos(2\pi nx).$$

Posons $q = e^{-2\pi}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{\pi} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (qe^{2i\pi x})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (qe^{-2i\pi x})^n \\ &= 1 + \frac{qe^{2i\pi x}}{1 - qe^{2i\pi x}} + \frac{qe^{-2i\pi x}}{1 - qe^{-2i\pi x}} \\ &= \frac{1 - q^2}{1 - 2q\cos(2\pi x) + q^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F(x) = \pi \frac{1 - e^{-4\pi}}{1 - 2e^{-2\pi}\cos(2\pi x) + e^{-4\pi}}.$$

En multipliant numerateur et denominateur par $e^{2\pi}$, on obtient aussi

$$F(x) = \pi \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{e^{2\pi} + e^{-2\pi} - 2\cos(2\pi x)} = \pi \frac{\sinh(2\pi)}{\cosh(2\pi) - \cos(2\pi x)}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \pi\, \frac{\sinh(2\pi)}{\cosh(2\pi) - \cos(2\pi x)}.}$$

FIN