Correction du sujet « Mathématiques 2 – MP »

CCINP – Session 2026

Exercice 1

On considère

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque immédiatement que

$$A = aJ + bI_3.$$

Q1. Rang de J et diagonalisation de J

Les trois colonnes de J sont égales à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

elles sont donc toutes colinéaires et non nulles. Ainsi

$$\mathrm{rg}(J) = 1.$$

Considérons maintenant le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$J\nu = 3\nu,$$

donc 3 est une valeur propre de J.

Si $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ vérifie $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, alors

$$Jx = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

donc 0 est valeur propre, et son sous-espace propre est

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

qui est de dimension 2.

Ainsi J possède les valeurs propres $3, 0, 0$ et est diagonalisable. Elle est semblable à

$$\mathrm{diag}(3, 0, 0).$$

Q2. Matrice diagonale semblable à A

Comme $A = aJ + bI_3$, toute base de vecteurs propres de J est aussi une base de vecteurs propres de A. En effet, si $Jx = \mu x$, alors

$$Ax = (aJ + bI_3)x = (a\mu + b)x.$$

Les valeurs propres de A sont donc

$$a \cdot 3 + b = 3a + b, \qquad b, \qquad b.$$

Par conséquent,

$$A \sim \mathrm{diag}(3a + b, b, b).$$

Q3. Polynôme minimal de A

On sait d'après la question précédente que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont b et $3a+b$. Or $a \neq 0$, donc

$$3a+b \neq b.$$

Pour une matrice diagonalisable, le polynôme minimal est le produit des facteurs $(X-\lambda)$ associés aux valeurs propres distinctes. Ainsi

$$\pi_A(X) = (X-b)(X-3a-b).$$

Q4.a) Calcul de A^n à partir du polynôme minimal

Posons

$$\lambda = 3a+b.$$

Puisque $\pi_A(X) = (X-b)(X-\lambda)$, le reste de la division euclidienne de X^n par π_A est de la forme

$$r_n(X) = \alpha_n X + \beta_n.$$

On impose l'égalité aux racines b et λ :

$$b^n = \alpha_n b + \beta_n, \qquad \lambda^n = \alpha_n \lambda + \beta_n.$$

En soustrayant,

$$\alpha_n = \frac{\lambda^n - b^n}{\lambda - b}.$$

Puis

$$\beta_n = b^n - \alpha_n b = \frac{\lambda b^n - b\lambda^n}{\lambda - b}.$$

Comme $\pi_A(A) = 0$, on obtient

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3,$$

soit finalement

$$\boxed{A^n = \frac{\lambda^n - b^n}{\lambda - b}\, A + \frac{\lambda b^n - b\lambda^n}{\lambda - b}\, I_3.}$$

Q4.b) Calcul de A^n à partir de J^p

On commence par calculer les puissances de J. Pour tout $p \geq 1$,

$$J^2 = 3J,$$

puis par récurrence immédiate,

$$\boxed{J^p = 3^{p-1} J \qquad (p \geq 1).}$$

Comme $A = aJ + bI_3$, avec J et I_3 qui commutent, on peut utiliser le binôme :

$$A^n = (aJ + bI_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} J^k.$$

Le terme $k=0$ vaut $b^n I_3$. Pour $k \geq 1$, on remplace J^k par $3^{k-1}J$:

$$A^n = b^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} 3^{k-1} J.$$

Donc

$$A^n = b^n I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k}\right) J.$$

Or
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} = (3a+b)^n - b^n = \lambda^n - b^n.$$
Ainsi
$$\boxed{A^n = b^n I_3 + \frac{\lambda^n - b^n}{3}\, J.}$$

Comme $A - bI_3 = aJ$ et $\lambda - b = 3a$, cette formule est bien équivalente à celle de la question précédente.

Exercice 2

On note
$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$$
et, pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,
$$\omega_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}.$$
Le but est de montrer que
$$\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k)$$
est un nombre réel.

Q5. Exemple

Avec
$$j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3},$$
on sait que les racines cubiques de l'unité sont $1, j, j^2$ et vérifient
$$X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2).$$
En identifiant le coefficient de X^2, on obtient
$$1 + j + j^2 = 0.$$

Choisissons par exemple
$$P(X) = 1 + 2X + 3X^2.$$
Alors
$$P(j^2) = \overline{P(j)}$$
car les coefficients de P sont réels. D'où
$$P(j)P(j^2) = |P(j)|^2 \in \mathbb{R}.$$
Cela illustre bien le résultat demandé.

Q6. Polynôme caractéristique de J

On note encore J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice de décalage circulaire :

$$J(x_1,\dots,x_n)^T = (x_2,\dots,x_n,x_1)^T.$$

On vérifie immédiatement que

$$J^n = I_n.$$

Ainsi toute valeur propre λ de J vérifie $\lambda^n = 1$.

D'autre part, pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, le vecteur

$$v_k = (1,\omega_k,\omega_k^2,\dots,\omega_k^{n-1})^T$$

vérifie

$$Jv_k = (\omega_k,\omega_k^2,\dots,\omega_k^{n-1},1)^T = \omega_k v_k.$$

Les ω_k sont donc toutes des valeurs propres de J.

Comme elles sont deux à deux distinctes et qu'il y en a n, ce sont exactement les racines du polynôme caractéristique. Donc

$$\boxed{\chi_J(X) = X^n - 1.}$$

Q7. Comparaison de A et de $P(J)$

On considère la matrice circulante

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Les puissances de J réalisent les décalages cycliques successifs ; ainsi

$$P(J) = a_0 I_n + a_1 J + \cdots + a_{n-1} J^{n-1}.$$

Or cette combinaison linéaire possède précisément pour première ligne

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

et chaque ligne suivante est obtenue par décalage circulaire vers la droite. Donc

$$\boxed{A = P(J).}$$

Q8. Diagonalisation de J puis de A dans $M_n(\mathbb{C})$

D'après la question Q6, J a n valeurs propres distinctes $\omega_0,\dots,\omega_{n-1}$; elle est donc diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$, et même

$$J \sim \operatorname{diag}(\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{n-1}).$$

Comme $A = P(J)$, les vecteurs propres de J sont aussi vecteurs propres de A. Si $Jv_k = \omega_k v_k$, alors

$$Av_k = P(J)v_k = P(\omega_k)v_k.$$

Ainsi A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et

$$\boxed{A \sim \operatorname{diag}(P(\omega_0), P(\omega_1), \dots, P(\omega_{n-1})).}$$

Q9. Déduction du résultat $(*)$

Comme A est une matrice réelle, son déterminant est réel. D'après la question précédente,

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) = P(1) \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k).$$

Or $P(1) \in \mathbb{R}$ puisque P est à coefficients réels.

Si $P(1) \neq 0$, on en déduit directement que

$$\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) \in \mathbb{R}.$$

Si $P(1) = 0$, on utilise le fait que

$$\omega_{n-k} = \overline{\omega_k} \quad \text{et} \quad P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, toujours parce que P a des coefficients réels. Les facteurs se regroupent donc par paires conjugées, ce qui donne un produit réel ; si n est pair, le facteur éventuel correspondant à $\omega_{n/2} = -1$ est lui aussi réel.

Dans tous les cas,

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) \in \mathbb{R}.}$$

Problème

On note

$$I = [0, +\infty[, \qquad F = \mathbb{R}_n[X],$$

et E l'ensemble des fonctions continues $f : I \to \mathbb{R}$ telles que

$$t \longmapsto f(t)^2 \mathrm{e}^{-t}$$

soit intégrable sur I.

Q10. Question de cours : projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Si $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de F, alors pour tout $x \in E$,

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.}$$

En effet, ce vecteur appartient à F, et

$$x - p_F(x)$$

est orthogonal à chacun des e_i, donc à F tout entier.

On en déduit

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2,$$

ce qui donne l'inégalité de Bessel

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2.}$$

Q11. Inégalité élémentaire et intégrabilité de fge^{-t}

Pour tous réels a, b,

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

En développant,

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0.$$

Donc

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

En appliquant cette inégalité à $|a|$ et $|b|$, on obtient

$$\boxed{|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}.}$$

Soient maintenant $f, g \in E$. Pour tout $t \geq 0$,

$$|f(t)g(t)|\mathrm{e}^{-t} \leq \frac{f(t)^2\mathrm{e}^{-t} + g(t)^2\mathrm{e}^{-t}}{2}.$$

Le membre de droite est intégrable sur I puisque $f, g \in E$. Par comparaison,

$$t \longmapsto f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}$$

est intégrable sur I.

Q12. E est un espace vectoriel et définition d'un produit scalaire

Si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$(f+\lambda g)^2 \leq 2f^2 + 2\lambda^2 g^2.$$

Donc

$$(f+\lambda g)^2\mathrm{e}^{-t} \leq 2f(t)^2\mathrm{e}^{-t} + 2\lambda^2 g(t)^2\mathrm{e}^{-t},$$

et le membre de droite est intégrable. Ainsi $f + \lambda g \in E$: E est bien un espace vectoriel.

On pose

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

La question précédente assure que cette intégrale est bien définie pour tous $f, g \in E$.

La bilinéarité et la symétrie sont immédiates. Enfin,

$$\langle f, f\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geq 0,$$

et si $\langle f, f\rangle = 0$, l'intégrande continue positive est nulle sur I, donc $f = 0$.

Par conséquent,

$$\boxed{\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

définit un produit scalaire sur E.

Q13. F est un sous-espace vectoriel de E

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que pour $t \geq 0$,

$$|P(t)| \leq C(1 + t^m).$$

Alors

$$P(t)^2 \mathrm{e}^{-t} \leq C'(1 + t^{2m})\mathrm{e}^{-t}$$

pour une certaine constante $C' > 0$. Or la fonction polynomiale multipliée par e^{-t} est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc $P \in E$.

Ainsi tout polynôme appartient à E, et en particulier

$$F = \mathbb{R}_n[X] \subset E.$$

Comme F est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on conclut que

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

Q14. Étude de h_n et de L_n

On pose

$$h_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}, \qquad L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\, h_n^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n \mathrm{e}^{-x}).$$

a) Calcul de $h_n^{(p)}$ pour $p \leq n$. Par la formule de Leibniz,

$$h_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{p-k} \mathrm{e}^{-x}.$$

Donc

$$\boxed{h_n^{(p)}(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.}$$

En particulier, si $p < n$, tous les exposants $n - k$ sont strictement positifs, donc

$$\boxed{h_n^{(p)}(0) = 0 \qquad (p < n).}$$

b) Nature de L_n. Pour $p = n$, on obtient

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{x^j}{j!}.$$

Ainsi L_n est un polynôme réel. Son terme de plus haut degré est obtenu pour $j = n$:

$$\frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

Donc

$$\boxed{L_n \in \mathbb{R}[X], \qquad \deg(L_n) = n, \qquad \text{coeff. dominant} = \frac{(-1)^n}{n!}.}$$

Q15. Expression de $\langle g, h_n^{(n)}\rangle$ et de $\langle g, L_n\rangle$

Soit $g \in \mathbb{R}[X]$. On écrit

$$\langle g, h_n^{(n)}\rangle = \int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

puisque le facteur e^{-t} du produit scalaire compense le e^t absent ici.

On intègre par parties n fois. À chaque étape, les termes de bord sont nuls :

— en 0, car $h_n^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p < n$;

— en $+\infty$, car un polynôme multiplié par e^{-t} tend vers 0.

On obtient donc

$$\boxed{\langle g, h_n^{(n)}\rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)h_n(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Comme

$$L_n(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{n!}h_n^{(n)}(t),$$

on a

$$\langle g, L_n\rangle = \int_0^{+\infty} g(t)L_n(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où

$$\boxed{\langle g, L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.}$$

Q16. Produit scalaire $\langle L_i, L_j\rangle$ pour $i < j$

Supposons $i < j$. On applique la formule précédente avec $g = L_i$ et $n = j$:

$$\langle L_i, L_j\rangle = \frac{(-1)^j}{j!}\int_0^{+\infty} L_i^{(j)}(t)t^j\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or L_i est de degré $i < j$, donc

$$L_i^{(j)} = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\langle L_i, L_j\rangle = 0 \qquad (i < j).}$$

La famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est donc orthogonale.

Q17. Calcul de $\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ puis de $\langle L_n, L_n\rangle$

Posons

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Une intégration par parties donne, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \Big[-t^n\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = nI_{n-1}.$$

Comme $I_0 = 1$, on obtient par récurrence

$$\boxed{I_n = n!.}$$

Pour calculer $\langle L_n, L_n\rangle$, on utilise la question Q15 avec $g = L_n$:

$$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t)t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or le coefficient dominant de L_n vaut $(-1)^n/n!$, donc

$$L_n^{(n)} = (-1)^n.$$

Ainsi

$$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!} \cdot n! = 1.$$

Donc

$$\boxed{\langle L_n, L_n\rangle = 1.}$$

Q18. Base orthonormale de F et expression de $P_F(g)$

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on a montré que $L_k \in F$, que $\deg(L_k) = k$, et que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est orthonormale. Comme $F = \mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, cette famille est une base orthonormale de F.

Ainsi, pour tout $g \in E$, la projection orthogonale de g sur F est donnée par

$$\boxed{P_F(g) = \sum_{k=0}^{n} \langle g, L_k\rangle L_k.}$$

Q19. Convergence de $\sum_{n\geq 0}\langle g, L_n\rangle^2$

La famille $(L_n)_{n\geq 0}$ est orthonormale dans E. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Bessel appliquée à $(L_0, \dots, L_N)$ donne

$$\sum_{n=0}^{N} \langle g, L_n\rangle^2 \leq \|g\|^2.$$

La suite des sommes partielles est croissante et majorée ; elle converge donc. On en déduit

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, L_n\rangle^2 \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, L_n\rangle^2 \leq \|g\|^2.}$$

Q20. Cas de $g_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}$ avec $\alpha > -\frac{1}{2}$

Soit

$$g_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}.$$

1) Vérification que $g_\alpha \in E$. On a

$$g_\alpha(x)^2 \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-(2\alpha+1)x}.$$

Cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $2\alpha + 1 > 0$, c'est-à-dire

$$\alpha > -\frac{1}{2}.$$

Donc bien

$$\boxed{g_\alpha \in E \quad \text{pour } \alpha > -\frac{1}{2}.}$$

2) Calcul de $\langle g_\alpha, L_n\rangle$. À partir de l'expression explicite de L_n,

$$L_n(t) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{t^j}{j!},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\langle g_\alpha, L_n\rangle &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} L_n(t) \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{1}{j!} \int_0^{+\infty} t^j \mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^{+\infty} t^j \mathrm{e}^{-\beta t}\,\mathrm{d}t = \frac{j!}{\beta^{j+1}} \qquad (\beta > 0),$$

donc, avec $\beta = \alpha + 1$,

$$\begin{aligned}\langle g_\alpha, L_n\rangle &= \frac{1}{\alpha+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(-\frac{1}{\alpha+1}\right)^j \\ &= \frac{1}{\alpha+1}\left(1 - \frac{1}{\alpha+1}\right)^n = \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\langle g_\alpha, L_n\rangle = \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}}.}$$

3) Somme des carrés. On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle g_\alpha, L_n\rangle|^2 = \frac{1}{(\alpha+1)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}\right)^n.$$

Comme $\alpha > -\frac{1}{2}$, on a

$$\alpha^2 < (\alpha+1)^2,$$

donc la série géométrique converge et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle g_\alpha, L_n\rangle|^2 &= \frac{1}{(\alpha+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}} \\ &= \frac{1}{2\alpha+1}.\end{aligned}$$

Or

$$\|g_\alpha\|^2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\alpha+1}.$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle g_\alpha, L_n\rangle|^2 = \|g_\alpha\|^2.}$$