

Correction détaillée

Mathématiques 1 – Filière MPI – Session 2026

Remarque. Pour les questions SQL, toute requête équivalente est bien entendu acceptée.

Exercice I

Q1. Il suffit de sélectionner les adresses électroniques sans doublon, en excluant la promotion 2025.

```
SELECT DISTINCT email
FROM ELEVES
WHERE promo <> 2025;
```

Q2. On agrège les paiements par élève. Comme l'énoncé demande le montant total payé *pour chaque élève*, une jointure externe gauche est la réponse la plus robuste : elle conserve aussi les élèves n'ayant effectué aucun paiement, avec un total nul.

```
SELECT e.nom,
       e.prenom,
       COALESCE(SUM(p.montant), 0) AS montant_total
FROM ELEVES e
LEFT JOIN PAIEMENTS p
      ON p.id_eleve = e.id
GROUP BY e.id, e.nom, e.prenom
ORDER BY e.nom, e.prenom;
```

Q3. Deux lignes sont ici considérées comme doublons lorsqu'elles ont même nom, même prenom, même email et même promo, mais des identifiants id éventuellement distincts. On groupe donc selon ces quatre attributs, puis on ne conserve que les groupes d'effectif au moins 2.

```
SELECT e.id, e.email
FROM ELEVES e
JOIN (
  SELECT nom, prenom, email, promo
  FROM ELEVES
  GROUP BY nom, prenom, email, promo
  HAVING COUNT(*) >= 2
) d
ON e.nom = d.nom
AND e.prenom = d.prenom
AND e.email = d.email
AND e.promo = d.promo;
```

Q4. On cherche les élèves qui n'apparaissent dans aucun paiement. Une jointure externe gauche suivie d'un test sur NULL convient.

```
SELECT e.id
FROM ELEVES e
LEFT JOIN PAIEMENTS p
      ON p.id_eleve = e.id
WHERE p.id_eleve IS NULL;
```

Exercice II

On rappelle que

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n.$$

Q5. Soit $t \in [-1, 1]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{P}(X = n)t^n| \leq \mathbb{P}(X = n).$$

Comme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1,$$

la série définissant $G_X(t)$ converge absolument. Donc G_X est bien définie sur $[-1, 1]$.

Q6. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Ainsi, pour $t \in [-1, 1]$,

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}.$$

Donc

$$\boxed{G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}}.$$

Q7. Soient X et Y indépendantes, à valeurs dans \mathbb{N} . Pour $|t| < 1$, les séries définissant $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ convergent absolument. On peut donc former leur produit de Cauchy :

$$G_X(t)G_Y(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = \ell)t^\ell \right).$$

Par la formule du produit de Cauchy,

$$G_X(t)G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k) \right) t^n.$$

Or l'indépendance donne

$$\mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k),$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \mathbb{P}(X + Y = n).$$

Ainsi,

$$G_X(t)G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X + Y = n)t^n = G_{X+Y}(t).$$

On a donc bien, pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\boxed{G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)}.$$

Q8. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes, alors d'après les questions précédentes,

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

Or c'est précisément la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Donc

$$\boxed{X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)}.$$

Problème

Partie I – Calcul d'une intégrale

Dans toute cette partie, pour $x > 0$, on pose

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} dt.$$

Q9. Fixons $x > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} \right| = \frac{x}{x^2 + t^2}.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} dt = \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi < +\infty.$$

L'intégrale est donc absolument convergente. Par conséquent, g est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Q10. Posons $t = xu$; comme $x > 0$, on a $dt = x du$. Alors

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + x^2 u^2} e^{ixu} x du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} du.$$

Ainsi,

$$\boxed{g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} du.}$$

On en déduit immédiatement

$$|g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \pi.$$

Donc g est bornée sur $]0, +\infty[$.

Q11. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, quand $x \rightarrow 0^+$,

$$\frac{e^{ixu}}{1 + u^2} \rightarrow \frac{1}{1 + u^2}.$$

De plus,

$$\left| \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} \right| \leq \frac{1}{1 + u^2},$$

et la fonction $u \mapsto \frac{1}{1 + u^2}$ est intégrable sur \mathbb{R} . Le théorème de convergence dominée donne donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \pi.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pi.}$$

Q12. Soit $K = [a, b] \subset]0, +\infty[$. Posons

$$\Phi(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it}.$$

Les fonctions Φ , $\partial_x \Phi$ et $\partial_x^2 \Phi$ sont continues sur $K \times \mathbb{R}$. On calcule

$$\partial_x \Phi(x, t) = \frac{t^2 - x^2}{(x^2 + t^2)^2} e^{it},$$

$$\partial_x^2 \Phi(x, t) = \frac{2x(x^2 - 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3} e^{it}.$$

Pour $(x, t) \in K \times \mathbb{R}$,

$$|\partial_x \Phi(x, t)| \leq \frac{1}{x^2 + t^2} \leq \frac{1}{a^2 + t^2},$$

et, en utilisant $|x^2 - 3t^2| \leq x^2 + 3t^2 \leq 3(x^2 + t^2)$,

$$|\partial_x^2 \Phi(x, t)| \leq \frac{6x}{(x^2 + t^2)^2} \leq \frac{6b}{(a^2 + t^2)^2}.$$

Les deux majorants

$$t \mapsto \frac{1}{a^2 + t^2} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{6b}{(a^2 + t^2)^2}$$

sont intégrables sur \mathbb{R} . On peut donc dériver deux fois sous le signe intégral sur K . Il s'ensuit que $g \in \mathcal{C}^2(K)$, donc comme K est arbitraire,

$$\boxed{g \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)}.$$

Q13. Posons

$$P(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2}.$$

On a

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, t) = \frac{2x(x^2 - 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(x, t) = \frac{2x(3t^2 - x^2)}{(x^2 + t^2)^3}.$$

Par somme,

$$\boxed{\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(x, t) = 0.}$$

Autrement dit,

$$P_{xx}(x, t) = -P_{tt}(x, t).$$

D'après la question précédente,

$$g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{xx}(x, t) e^{it} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} P_{tt}(x, t) e^{it} dt.$$

Intégrons par parties deux fois en t sur $[-A, A]$:

$$\int_{-A}^A P_{tt}(x, t) e^{it} dt = \left[P_t(x, t) e^{it} \right]_{-A}^A - \left[iP(x, t) e^{it} \right]_{-A}^A - \int_{-A}^A P(x, t) e^{it} dt.$$

Or, quand $|t| \rightarrow +\infty$,

$$P(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad P_t(x, t) = \frac{-2xt}{(x^2 + t^2)^2} = O\left(\frac{1}{t^3}\right),$$

donc les termes de bord tendent vers 0. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{tt}(x, t)e^{it} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, t)e^{it} dt = -g(x).$$

Par suite,

$$g''(x) = -(-g(x)) = g(x).$$

Donc g est solution de l'équation différentielle

$$\boxed{y'' - y = 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[.}$$

Q14. L'équation différentielle $y'' - y = 0$ a pour solutions sur $]0, +\infty[$ les fonctions

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

Comme g est bornée sur $]0, +\infty[$ (question 10), on doit avoir $A = 0$; sinon le terme Ae^x ne serait pas borné lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Ainsi,

$$g(x) = Be^{-x}.$$

En faisant tendre x vers 0^+ et en utilisant la question 11, on obtient

$$B = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pi.$$

Donc, pour tout $x > 0$,

$$\boxed{g(x) = \pi e^{-x}.}$$

Partie II – Formule sommatoire de Poisson

Dans toute la suite, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{1+t^2},$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n).$$

On pourra aussi écrire, lorsque cela simplifie la lecture,

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n).$$

Q15. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour $n > |x|$, on a

$$|x+n| \geq n - |x|, \quad |x-n| \geq n - |x|.$$

En particulier, pour $n \geq 2|x| + 1$,

$$|x \pm n| \geq \frac{n}{2},$$

donc

$$0 \leq f(x \pm n) = \frac{1}{1+(x \pm n)^2} \leq \frac{4}{n^2}.$$

Les deux séries définissant $F(x)$ convergent donc par comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$; ainsi F est bien définie sur \mathbb{R} .

Ensuite,

$$\begin{aligned} F(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+1+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x+1-n) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} f(x+m) + \sum_{p=0}^{+\infty} f(x-p) = F(x). \end{aligned}$$

Donc F est 1-périodique.

Q16. Sur l'intervalle $[0, 1]$, on a pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \geq 1$,

$$0 \leq f(x+n) = \frac{1}{1+(x+n)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

De même, pour $n \geq 2$,

$$0 \leq f(x-n) = \frac{1}{1+(x-n)^2} \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Ainsi, par le critère de Weierstrass, les séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n)$$

convergent uniformément sur $[0, 1]$.

Comme chacune de leurs sommes partielles est continue, leurs sommes le sont aussi. Donc F est continue sur $[0, 1]$.

Enfin, F est 1-périodique. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on choisit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x_0 - m \in [0, 1]$. Alors, pour x voisin de x_0 ,

$$F(x) = F(x-m).$$

Or la fonction $x \mapsto x-m$ est continue et F est continue en $x_0 - m \in [0, 1]$; ainsi F est continue en x_0 . Comme x_0 est arbitraire,

$$\boxed{F \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Pour toute fonction u continue sur \mathbb{R} et 1-périodique, on pose, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k(u) = \int_0^1 u(t) e^{-2i\pi kt} dt.$$

Q17. D'après la question précédente, les séries définissant F convergent uniformément sur $[0, 1]$; on peut donc intégrer terme à terme :

$$c_k(F) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n) e^{-2i\pi kt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f(t-n) e^{-2i\pi kt} dt.$$

Dans la première somme, posons $u = t+n$; alors

$$\int_0^1 f(t+n) e^{-2i\pi kt} dt = \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi k(u-n)} du = \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi ku} du,$$

car $e^{2i\pi kn} = 1$.

Dans la seconde somme, avec $u = t-n$,

$$\int_0^1 f(t-n) e^{-2i\pi kt} dt = \int_{-n}^{1-n} f(u) e^{-2i\pi k(u+n)} du = \int_{-n}^{1-n} f(u) e^{-2i\pi ku} du.$$

En sommant toutes ces intégrales sur les intervalles $[n, n+1]$ pour $n \geq 0$ et $[-n, 1-n]$ pour $n \geq 1$, on reconstitue \mathbb{R} . On obtient donc

$$\boxed{c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi kt} dt.}$$

Q18. Posons $m = n + k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = \int_0^1 e^{-2i\pi mt} dt.$$

Si $m = 0$, l'intégrande vaut identiquement 1, donc l'intégrale vaut 1.

Si $m \neq 0$,

$$\int_0^1 e^{-2i\pi mt} dt = \left[\frac{e^{-2i\pi mt}}{-2i\pi m} \right]_0^1 = \frac{e^{-2i\pi m} - 1}{-2i\pi m} = 0.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = \begin{cases} 1, & \text{si } n + k = 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie III – Applications

Q19. D'abord,

$$c_0(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi.$$

Donc

$$c_0(F) = \pi.$$

Soit maintenant $k > 0$. D'après la question 17,

$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi kt}}{1+t^2} dt.$$

Par le changement de variable $u = -t$,

$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi ku}}{1+u^2} du.$$

En comparant avec le résultat de la partie I,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2} du = \pi e^{-x} \quad (x > 0),$$

on obtient, en prenant $x = 2\pi k$,

$$c_k(F) = \pi e^{-2\pi k} \quad (k > 0).$$

L'énoncé autorise ensuite l'utilisation de la relation admise

$$c_{-k}(F) = c_k(F) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Q20. On considère

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) e^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) e^{-2i\pi nx}.$$

Grâce à la question précédente,

$$|c_n(F) e^{\pm 2i\pi nx}| = |c_n(F)| = \pi e^{-2\pi n} \quad (n \geq 1),$$

et la série géométrique $\sum_{n \geq 1} \pi e^{-2\pi n}$ converge. Par le critère de Weierstrass, les deux séries définissant G convergent uniformément sur \mathbb{R} .

Chaque somme partielle est continue et 1-périodique. Une limite uniforme de fonctions continues (resp. 1-périodiques) conserve ces propriétés. Donc

$$G \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et 1-périodique.}$$

Q21. Puisque les séries définissant G convergent uniformément sur $[0, 1]$, on peut calculer les coefficients de Fourier terme à terme. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_k(G) &= \int_0^1 G(x) e^{-2i\pi kx} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) \int_0^1 e^{2i\pi(n-k)x} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) \int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)x} dx. \end{aligned}$$

D'après la question 18, les intégrales sont nulles sauf :

- dans la première somme, lorsque $n = k$ si $k \geq 0$;
- dans la seconde somme, lorsque $n = -k$ si $k \leq -1$.

On obtient donc dans tous les cas

$$\boxed{c_k(G) = c_k(F).}$$

Les fonctions F et G sont continues sur \mathbb{R} , 1-périodiques, et ont les mêmes coefficients de Fourier. Par le résultat admis dans l'énoncé, on conclut que

$$\boxed{F = G.}$$

Q22. Comme $F = G$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \pi + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n} e^{2i\pi n x} + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n} e^{-2i\pi n x}.$$

En posant $r = e^{-2\pi}$ et $\theta = 2\pi x$, cela s'écrit

$$F(x) = \pi \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-in\theta} \right) = \pi \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) \right).$$

Or, pour $|r| < 1$,

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-in\theta} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

Par conséquent,

$$F(x) = \pi \frac{1 - e^{-4\pi}}{1 - 2e^{-2\pi} \cos(2\pi x) + e^{-4\pi}}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $e^{2\pi}$, on obtient aussi

$$\boxed{F(x) = \pi \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{e^{2\pi} + e^{-2\pi} - 2 \cos(2\pi x)}} = \boxed{\pi \frac{\sinh(2\pi)}{\cosh(2\pi) - \cos(2\pi x)}}.$$

Comme $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + (x+n)^2}$, on peut reformuler le résultat final sous la forme classique

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + (x+n)^2} = \pi \frac{\sinh(2\pi)}{\cosh(2\pi) - \cos(2\pi x)}}.$$

Fin de la correction