Correction détaillée
CCINP 2026 – Mathématiques PC

Réduction par blocs, loi géométrique et équation différentielle non ordinaire

Cette correction est rédigée dans un style *prépa* : les arguments sont détaillés, mais on s'efforce de garder une rédaction concise et structurée.

Exercice 1 – Réduction de matrices par blocs

Dans tout l'exercice, on note

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix},$$

selon la partie considérée.

Partie I – Première forme $M = \left(\begin{smallmatrix} A & A \\ A & A \end{smallmatrix}\right)$

I.1 – Étude de l'exemple $n = 2$

On suppose ici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}.$$

Q1. La matrice M est réelle symétrique, car A est symétrique et

$$M^\top = \begin{pmatrix} A^\top & A^\top \\ A^\top & A^\top \end{pmatrix} = M.$$

Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable. Donc M est diagonalisable.

Q2. On peut exhiber directement des vecteurs propres. Posons

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$Mu_1 = 2u_1, \qquad Mu_2 = 4u_2, \qquad Mv_1 = 0, \qquad Mv_2 = 0.$$

Comme (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^4$, les valeurs propres de M sont

$$\boxed{0, 0, 2, 4}.$$

Q3. La matrice M est symétrique d'après la question précédente. Pour

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

on a

$$MX = \begin{pmatrix} x+z \\ 2(y+t) \\ x+z \\ 2(y+t) \end{pmatrix},$$

donc

$$X^\top MX = x(x+z) + y\,2(y+t) + z(x+z) + t\,2(y+t) = (x+z)^2 + 2(y+t)^2 \geq 0.$$

Ainsi M est positive.

Elle n'est pas définie positive, car par exemple

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad V^\top MV = 0.$$

Donc

$$\boxed{M \text{ est symétrique positive, mais non définie positive.}}$$

I.2 – Réduction de la matrice générale

On revient maintenant au cas général, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, et

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Q4. Calculons

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2I_n & 0_n \\ 0_n & 2I_n \end{pmatrix} = I_{2n}.$$

De même, le produit dans l'autre sens vaut aussi I_{2n}. Ainsi P est inversible et

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}.}$$

Q5. On calcule d'abord

$$MP = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & 2A \\ 0_n & 2A \end{pmatrix}.$$

Puis

$$P^{-1}MP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & 2A \\ 0_n & 2A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix}.$$

Donc M est semblable à

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix}.}$$

Q6. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc

$$\chi_M(\lambda) = \chi_D(\lambda).$$

Or

$$\chi_D(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda I_n & 0_n \\ 0_n & \lambda I_n - 2A \end{pmatrix} = \det(\lambda I_n)\det(\lambda I_n - 2A).$$

Ainsi
$$\chi_M(\lambda) = \lambda^n \det(2(\tfrac{\lambda}{2} I_n - A)) = \lambda^n 2^n \chi_A\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Finalement
$$\boxed{\chi_M(\lambda) = \lambda^n 2^n \chi_A\left(\frac{\lambda}{2}\right).}$$

On en déduit que le spectre de M est obtenu à partir de celui de A en ajoutant 0 et en doublant les valeurs propres de A :
$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{0\} \cup 2\mathrm{Sp}(A).}$$

Plus précisément, 0 apparaît avec une multiplicité algébrique au moins égale à n.

Q7. Écrivons
$$Q(X) = \sum_{k=0}^{d} q_k X^k.$$

Alors
$$Q\left(\frac{D}{2}\right) = \sum_{k=0}^{d} q_k \left(\frac{D}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{d} q_k \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & A^k \end{pmatrix} \quad (k \geq 1),$$

et pour $k = 0$,
$$q_0 I_{2n} = \begin{pmatrix} q_0 I_n & 0_n \\ 0_n & q_0 I_n \end{pmatrix}.$$

On obtient donc
$$Q\left(\frac{D}{2}\right) = \begin{pmatrix} q_0 I_n & 0_n \\ 0_n & Q(A) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,
$$Q\left(\frac{D}{2}\right) = 0 \iff q_0 = 0 \text{ et } Q(A) = 0.$$

Autrement dit,
$$\boxed{Q \text{ annule } A \text{ et } Q(0) = 0 \iff Q\left(\frac{X}{2}\right) \text{ annule } D.}$$

Q8. On utilise le critère classique : une matrice est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Si A est diagonalisable. Il existe un polynôme Q scindé à racines simples annulant A. Si $Q(0) \neq 0$, on remplace Q par $XQ(X)$: ce nouveau polynôme annule encore A, vérifie $Q(0) = 0$ et reste scindé à racines simples. Par Q7, le polynôme $Q(X/2)$ annule alors D et il est encore scindé à racines simples. Donc D, puis M, sont diagonalisables.

Réciproquement, si M est diagonalisable. Alors D est diagonalisable. Il existe donc un polynôme R scindé à racines simples annulant D. Comme $0 \in \mathrm{Sp}(D)$, on a nécessairement $R(0) = 0$. Posons $Q(X) = R(2X)$. Alors Q est scindé à racines simples, $Q(0) = 0$, et $Q(X/2) = R(X)$ annule D. Par Q7, Q annule A. Donc A est diagonalisable.

On a finalement
$$\boxed{M \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ est diagonalisable.}}$$

Partie II – Seconde forme $M = \left(\begin{smallmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{smallmatrix}\right)$

On considère maintenant
$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}.$$

Q9. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\boxed{M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}.}$$

Pour $k = 0$, on a bien
$$M^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$
Pour $k = 1$, la formule est vraie. Supposons-la vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$M^{k+1} = M^k M = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^{k+1} \\ 0_n & A^{k+1} \end{pmatrix}.$$

La propriété est donc démontrée.

Q10. Si $Q(X) = \sum_{k=0}^{d} q_k X^k$, alors

$$Q(M) = \sum_{k=0}^{d} q_k M^k = \sum_{k=0}^{d} q_k \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{d} q_k A^k & \sum_{k=0}^{d} k q_k A^k \\ 0_n & \sum_{k=0}^{d} q_k A^k \end{pmatrix}.$$

Or
$$\sum_{k=0}^{d} q_k A^k = Q(A), \qquad \sum_{k=0}^{d} k q_k A^k = A \sum_{k=1}^{d} k q_k A^{k-1} = AQ'(A).$$
D'où
$$\boxed{Q(M) = \begin{pmatrix} Q(A) & AQ'(A) \\ 0_n & Q(A) \end{pmatrix}.}$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que M est diagonalisable et on note $S \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de M à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Q11. Comme S annule M, la question précédente donne

$$0 = S(M) = \begin{pmatrix} S(A) & AS'(A) \\ 0_n & S(A) \end{pmatrix}.$$

On en déduit en particulier
$$S(A) = 0.$$
Le polynôme S étant scindé à racines simples, cela montre que A est diagonalisable.

Soit alors $\mu \in \mathrm{Sp}(A)$ et $v \neq 0$ un vecteur propre associé : $Av = \mu v$. Alors

$$S'(A)v = S'(\mu)v.$$

Ainsi les vecteurs propres de A sont aussi vecteurs propres de $S'(A)$. Comme A est diagonalisable, une base de vecteurs propres de A diagonalise aussi $S'(A)$. Donc $S'(A)$ est diagonalisable et

$$\boxed{\mathrm{Sp}(S'(A)) = S'(\mathrm{Sp}(A)) = \{S'(\mu)\,;\, \mu \in \mathrm{Sp}(A)\}.}$$

Q12. Comme $S(A) = 0$, toute valeur propre μ de A est racine de S. Or les racines de S sont simples, donc

$$S'(\mu) \neq 0 \qquad \text{pour tout } \mu \in \mathrm{Sp}(A).$$

D'après la question précédente, 0 n'est donc pas valeur propre de $S'(A)$, ce qui prouve que $S'(A)$ est inversible.

Or on a aussi, d'après Q10,

$$AS'(A) = 0.$$

Comme $S'(A)$ est inversible, il vient nécessairement

$$A = 0_n.$$

La réciproque est immédiate : si $A = 0_n$, alors

$$M = 0_{2n},$$

qui est diagonalisable.

On conclut :

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable si et seulement si } A = 0_n.}$$

Exercice 2 – Autour de la loi géométrique

On fixe $p \in]0,1[$ et on note $q = 1 - p$. Les variables $(X_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X_1 = k) = pq^{k-1}.$$

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad V_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Partie I – Étude de S_n

Q13. Chaque variable X_i prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. La somme de n telles variables prend donc ses valeurs dans

$$\{n, n+1, n+2, \dots\}.$$

Réciproquement, tout entier $k \geq n$ s'écrit

$$k = 1 + \cdots + 1 + (k - n + 1),$$

donc est bien une valeur possible de S_n. Ainsi

$$\boxed{S_n(\Omega) = \{k \in \mathbb{N}^* \,;\, k \geq n\}.}$$

Q14. Pour une variable géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$, on sait que

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2}.$$

Les variables $X_1, \dots, X_n$ étant indépendantes,

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \frac{n}{p}, \qquad \mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = \frac{nq}{p^2}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{p}, \qquad \mathbb{V}(S_n) = \frac{nq}{p^2}.}$$

Q15. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $t \in (-1, 1)$,

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Y = k)|t|^k \leq \sum_{k \geq 0} |t|^k,$$

et la série géométrique de droite converge. Donc la série entière

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Y = k)t^k$$

converge pour tout $|t| < 1$; son rayon de convergence est donc supérieur ou égal à 1.

Q16. Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, donc pour tout $t \in (-1, 1)$,

$$G_{S_n}(t) = \mathbb{E}(t^{S_n}) = \mathbb{E}(t^{X_1 + \cdots + X_n}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(t^{X_k}) = \left(G_{X_1}(t)\right)^n.$$

Or

$$G_{X_1}(t) = \sum_{k \geq 1} pq^{k-1}t^k = pt \sum_{j \geq 0} (qt)^j = \frac{pt}{1 - qt}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{G_{S_n}(t) = \left(\frac{pt}{1 - qt}\right)^n.}$$

Q17. On utilise le développement classique, valable pour $|u| < 1$,

$$\frac{1}{(1 - u)^n} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n + j - 1}{j} u^j.$$

Avec $u = qt$, on obtient, pour $t \in (-1, 1)$,

$$G_{S_n}(t) = (pt)^n \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n + j - 1}{j} q^j t^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n + j - 1}{j} p^n q^j t^{n+j}.$$

En posant $k = n + j$, cela devient

$$G_{S_n}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k - 1}{n - 1} p^n q^{k-n} t^k.$$

Par identification avec la fonction génératrice de S_n,

$$\boxed{\forall k \geq n, \quad \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k - 1}{n - 1} p^n q^{k-n}.}$$

C'est la loi binomiale négative associée à la somme de n lois géométriques.

Partie II – Loi de V_n

Q18. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_1 > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} pq^{j-1} = pq^k \sum_{m=0}^{+\infty} q^m = pq^k \frac{1}{1-q} = q^k.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 > k) = q^k.}$$

Q19. L'événement $\{V_n \leq k\}$ est égal à

$$\{X_1 \leq k\} \cap \cdots \cap \{X_n \leq k\}.$$

Par indépendance,

$$\mathbb{P}(V_n \leq k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq k) = \big(\mathbb{P}(X_1 \leq k)\big)^n.$$

Or

$$\mathbb{P}(X_1 \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > k) = 1 - q^k.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(V_n \leq k) = (1 - q^k)^n.}$$

Q20. La variable V_n est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour montrer qu'elle est d'espérance finie, on majore d'abord sa queue :

$$\mathbb{P}(V_n > k) = 1 - \mathbb{P}(V_n \leq k) = 1 - (1 - q^k)^n \leq nq^k,$$

par l'inégalité de Bernoulli $(1-u)^n \geq 1 - nu$ appliquée à $u = q^k \in [0, 1]$. Comme la série géométrique $\sum nq^k$ converge, la série $\sum \mathbb{P}(V_n > k)$ converge, donc V_n est intégrable.

Pour une variable aléatoire entière positive Y, on a la formule des queues

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y > k).$$

En l'appliquant à V_n et en utilisant Q19, il vient

$$\mathbb{E}(V_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - (1 - q^k)^n\Big).$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(V_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - (1 - q^k)^n\Big).}$$

Q21. Comme V_n est à valeurs entières,

$$\{V_n = k\} = \{V_n \leq k\} \setminus \{V_n \leq k - 1\}.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(V_n = k) = \mathbb{P}(V_n \leq k) - \mathbb{P}(V_n \leq k - 1).$$

Avec Q19, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(V_n = k) = \big(1 - q^k\big)^n - \big(1 - q^{k-1}\big)^n.}$$

Partie III – Équivalent de $\mathbb{E}(V_n)$

On pose, pour $x \geq 0$,
$$\varphi_n(x) = 1 - (1-q^x)^n.$$

Q22. La fonction $x \mapsto q^x = e^{x \ln q}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ puisque $\ln q < 0$. Donc $x \mapsto 1 - q^x$ est croissante, puis $x \mapsto (1-q^x)^n$ est croissante, et enfin φ_n est décroissante.

De plus, pour $x \geq 0$,
$$0 \leq \varphi_n(x) = 1 - (1-q^x)^n \leq nq^x,$$
encore par Bernoulli. Or
$$\int_0^{+\infty} q^x \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{x \ln q} \, \mathrm{d}x$$
converge puisque $\ln q < 0$. Par comparaison, φ_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Q23. La fonction φ_n est positive et décroissante sur $[0, +\infty[$. On peut donc appliquer la comparaison série-intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_n(k) < \varphi_n(0) + \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x.$$
Or $\varphi_n(0) = 1$ et, d'après Q20,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_n(k) = \mathbb{E}(V_n).$$
Ainsi
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x \leq \mathbb{E}(V_n) < 1 + \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x.}$$

Q24. Sur $[0, +\infty[$, posons
$$u = 1 - q^x.$$
Comme $q^x \in]0, 1]$, on a $u \in [0, 1[$, et quand x varie de 0 à $+\infty$, u varie de 0 à 1.

On a
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\ln(q)\, q^x = -\ln(q)(1-u), \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{-\ln(q)(1-u)}.$$
Comme $\varphi_n(x) = 1 - u^n$, il vient
$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{-\ln q} \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u} \, \mathrm{d}u.$$
Autrement dit,
$$\boxed{\int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u} \, \mathrm{d}u = -\ln(q) \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x.}$$
L'intégrale de gauche converge d'ailleurs immédiatement car
$$\frac{1-u^n}{1-u} = 1 + u + \cdots + u^{n-1}$$
pour $u \in [0, 1[$, et le second membre se prolonge continûment en $u = 1$.

Q25. D'après l'égalité précédente,
$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{-\ln q} \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{-\ln q} \int_0^1 (1 + u + \cdots + u^{n-1}) \, \mathrm{d}u.$$
Donc
$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{-\ln q} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{-\ln q} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Comme on admet que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n,$$
on obtient
$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \sim \frac{\ln n}{-\ln q}.$$
Enfin, Q23 montre que $\mathbb{E}(V_n)$ diffère de cette intégrale d'une quantité bornée par 1, donc les deux sont équivalentes. Par suite,
$$\boxed{\mathbb{E}(V_n) \sim \frac{\ln n}{-\ln q}} \qquad (n \to +\infty).$$
Comme $q = 1 - p$, on peut aussi écrire
$$\boxed{\mathbb{E}(V_n) \sim \frac{\ln n}{-\ln(1-p)}.}$$

Exercice 3 – Résolution d'une équation différentielle non ordinaire

On fixe $\lambda \in [-1, 1]$ et on étudie les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f(\lambda x). \tag{E_λ}$$
On note S_λ l'ensemble des solutions.

Partie I – Généralités

Q26. Soient $f, g \in S_\lambda$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors
$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha f(\lambda x) + \beta g(\lambda x) = (\alpha f + \beta g)(\lambda x).$$
Donc $\alpha f + \beta g \in S_\lambda$. Comme la fonction nulle appartient évidemment à S_λ, on a bien
$$\boxed{S_\lambda \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$$

Q27. Si $\lambda = 1$, l'équation devient
$$f'(x) = f(x),$$
dont les solutions sont exactement les fonctions
$$\boxed{f(x) = Ce^x \quad (C \in \mathbb{R}).}$$
Ainsi
$$\boxed{S_1 = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^x).}$$

Q28. Si $\lambda = 0$, l'équation s'écrit
$$f'(x) = f(0),$$
c'est-à-dire que f' est constante. Donc f est affine : il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$$f(x) = ax + b.$$
Or
$$f'(x) = a \qquad \text{et} \qquad f(0) = b.$$

L'équation impose $a = b$. On obtient donc

$$f(x) = a(x+1).$$

Par conséquent,

$$\boxed{S_0 = \mathrm{Vect}(x \mapsto x+1).}$$

Q29. Supposons $f \in S_{-1}$. Alors

$$f'(x) = f(-x).$$

Comme f est dérivable, la fonction $x \mapsto f(-x)$ est dérivable ; ainsi f' est dérivable et f est deux fois dérivable. En dérivant l'égalité précédente, on obtient

$$f''(x) = -f'(-x).$$

Mais, en remplaçant x par $-x$ dans l'équation de départ,

$$f'(-x) = f(x).$$

Donc

$$\boxed{f''(x) + f(x) = 0.}$$

Les solutions de cette équation différentielle sont

$$f(x) = a\cos x + b\sin x.$$

On réinjecte dans l'équation $f'(x) = f(-x)$:

$$-a\sin x + b\cos x = a\cos x - b\sin x.$$

Par identification, on obtient $b = a$. Ainsi

$$\boxed{S_{-1} = \mathrm{Vect}(x \mapsto \cos x + \sin x).}$$

Partie II – Solutions développables en série entière

On suppose dans cette partie que $\lambda \neq 0$.

Q30. Considérons la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!}.$$

Si l'on note

$$a_n = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n!},$$

alors

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|\lambda|^n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Le rayon de convergence est donc infini. On a ainsi

$$\boxed{R = +\infty.}$$

Q31. Notons

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!}.$$

Comme le rayon de convergence est infini, on peut dériver terme à terme sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda^{\frac{(m+1)m}{2}} \frac{x^m}{m!}\\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda^m \lambda^{\frac{m(m-1)}{2}} \frac{x^m}{m!}\\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda^{\frac{m(m-1)}{2}} \frac{(\lambda x)^m}{m!} = \varphi(\lambda x).\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\varphi \in S_\lambda.}$$

Q32. Supposons que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

ait un rayon de convergence infini et vérifie (E_λ). Alors

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

et

$$f(\lambda x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^n x^n.$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+1) a_{n+1} = \lambda^n a_n.}$$

Q33. La relation de récurrence précédente donne immédiatement, par induction,

$$a_n = \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} a_0.$$

Ainsi

$$f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!} = a_0 \varphi(x).$$

Réciproquement, Q31 montre que tout multiple de φ appartient à S_λ. Donc

$$\boxed{f \in S_\lambda \iff f \in \mathrm{Vect}(\varphi).}$$

Partie III – Toute solution est développable en série entière

On suppose encore $\lambda \neq 0$ et on considère $f \in S_\lambda$.

Q34. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(t) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n t).}$$

Pour $n = 0$, c'est trivial. Pour $n = 1$, c'est exactement l'équation (E_λ). Supposons la propriété vraie à un rang n. Alors

$$f^{(n)}(t) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n t).$$

Comme f est dérivable, la fonction $t \mapsto f(\lambda^n t)$ est dérivable ; ainsi $f^{(n)}$ est dérivable et f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda^n f'(\lambda^n t) \\ &= \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}+n} f(\lambda^{n+1}t) = \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} f(\lambda^{n+1}t). \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Q35. Fixons $a > 0$ et $x \in [-a, a]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g_n : t \longmapsto \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t), \qquad t \in [-a, a].$$

D'après Q34,

$$|f^{(n+1)}(t)| = |\lambda|^{\frac{n(n+1)}{2}} |f(\lambda^{n+1}t)|.$$

Comme $|\lambda| \leq 1$ et $|t| \leq a$, on a $|\lambda^{n+1}t| \leq a$. La fonction f étant continue sur le segment $[-a, a]$, elle y est bornée : il existe $M_a > 0$ tel que

$$|f(u)| \leq M_a \qquad (u \in [-a, a]).$$

Par suite, pour tout $t \in [-a, a]$,

$$|g_n(t)| \leq \frac{|x-t|^n}{n!} M_a \leq M_a \frac{(2a)^n}{n!}.$$

Or

$$M_a \frac{(2a)^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Le critère de Weierstrass montre alors que $g_n \to 0$ uniformément sur $[-a, a]$.

Q36. On utilise la formule de Taylor admise dans l'énoncé avec $h = f$: pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-a, a]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après Q35, $g_n \to 0$ uniformément sur $[-a, a]$, donc

$$\left| \int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq 2a \sup_{t \in [-a,a]} |g_n(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Il vient donc, pour tout $x \in [-a, a]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Comme $a > 0$ est arbitraire, cette égalité vaut en fait pour tout réel x. Donc f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et même de rayon de convergence infini.

En outre, Q34 donne

$$f^{(k)}(0) = \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} f(0),$$

donc

$$f(x) = f(0) \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{k!} = f(0)\varphi(x).$$

On retrouve donc directement que toute solution est proportionnelle à φ.

Q37. D'après Q36 puis Q33, lorsque $\lambda \neq 0$, tout élément de S_λ est un multiple de

$$\varphi_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!}.$$

Ainsi

$$\dim S_\lambda = 1 \qquad (\lambda \neq 0).$$

Pour $\lambda = 0$, la question Q28 montre aussi que $S_0 = \mathrm{Vect}(x \mapsto x+1)$, donc $\dim S_0 = 1$.

Finalement,

$$\boxed{\forall \lambda \in [-1,1], \qquad \dim S_\lambda = 1.}$$

Fin de la correction