

CCINP PSI 2026

Mathématiques – Correction détaillée

Cette correction est rédigée dans un esprit de copie de concours : calculs justifiés, transitions explicites et résultats clairement formulés.

Exercice 1 – Un jeu de pile ou face

On pose, pour alléger les écritures, $q = 1 - p \in]0, 1[$.

Q1. La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$, puisque c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Pour $k = 0$, c'est immédiat. Supposons la formule vraie à l'ordre k . Alors

$$f^{(k+1)}(x) = k!(k+1)(1-x)^{-k-2} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}},$$

ce qui achève la récurrence.

Q2. Pour $|x| < 1$, on dispose de la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x).$$

On peut dériver terme à terme sur l'intervalle de convergence. Après k dérivations,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = f^{(k)}(x).$$

D'après la question précédente,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in] -1, 1[, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Étude du jeu

Q3. Le joueur 1 s'arrête au premier succès. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = q^{n-1}p.$$

Autrement dit, X suit la loi géométrique de paramètre p sur \mathbb{N}^* .

Q4. Conditionnellement à l'événement $\{X = n\}$, le joueur 2 effectue n lancers indépendants et compte le nombre de *Pile*. Donc

$$Y \mid (X = n) \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Par conséquent, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Q5. Les événements $(X = n)_{n \geq 1}$ forment un système complet d'événements. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid X = n) \mathbb{P}(X = n).$$

Comme $\mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = 0$ si $n < k$, on peut aussi écrire

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid X = n) \mathbb{P}(X = n).$$

Q6. En utilisant les questions précédentes,

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n q^{n-1} p = p \sum_{n=1}^{+\infty} q^{2n-1} = pq \sum_{m=0}^{+\infty} q^{2m}.$$

Or $|q^2| < 1$, donc

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{pq}{1 - q^2} = \frac{pq}{1 - (1 - p)^2} = \frac{pq}{p(2 - p)} = \frac{1 - p}{2 - p}.$$

Q7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot q^{n-1} p \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1} q^{2n-k-1}. \end{aligned}$$

Posons $n = m + k$. Il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= p^{k+1} q^{k-1} \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+k}{k} q^{2m} \\ &= \frac{p^{k+1} q^{k-1}}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+k)!}{m!} (q^2)^m. \end{aligned}$$

En appliquant la question Q2 avec $x = q^2$, on obtient

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+k)!}{m!} (q^2)^m = \frac{k!}{(1 - q^2)^{k+1}}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{p^{k+1} q^{k-1}}{(1 - q^2)^{k+1}}.$$

Comme $1 - q^2 = 1 - (1 - p)^2 = p(2 - p)$, on en déduit

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{(1 - p)^{k-1}}{(2 - p)^{k+1}}.}$$

Exercice 2 – Une caractérisation de la fonction Γ

On note

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Existence : la fonction Γ vérifie (S)

Q8. Soit $x > 0$. On étudie l'intégrale sur $(0, 1]$ puis sur $[1, +\infty[$.

Au voisinage de 0. Pour $t \in]0, 1]$, on a $e^{-t} \leq 1$, donc

$$0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}.$$

Or

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} < +\infty.$$

L'intégrale converge donc sur $(0, 1]$.

Au voisinage de $+\infty$. Considérons

$$h_x(t) = t^{x-1} e^{-t/2}, \quad t \geq 1.$$

La fonction h_x est continue sur $[1, +\infty[$. Si $x \leq 1$, elle est décroissante. Si $x > 1$,

$$h'_x(t) = t^{x-2} e^{-t/2} \left(x - 1 - \frac{t}{2} \right),$$

donc h_x croît puis décroît ; en particulier elle est bornée sur $[1, +\infty[$. Il existe donc $M_x > 0$ tel que

$$t^{x-1} e^{-t} = h_x(t) e^{-t/2} \leq M_x e^{-t/2} \quad (t \geq 1).$$

Comme $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge, l'intégrale converge aussi sur $[1, +\infty[$.

Finalement, $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$. De plus, l'intégrande étant strictement positive sur $]0, +\infty[$,

$$\Gamma(x) > 0.$$

Q9. Soit $x > 0$. Pour $A > 0$, une intégration par parties sur $[0, A]$ donne

$$\int_0^A t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t} \right]_0^A + x \int_0^A t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Or $t^x e^{-t} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, et $t^x e^{-t} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$ puisque $x > 0$. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Q10. Soient $0 < a < 1 < b$, $x \in [a, b]$ et $t > 0$.

— Si $0 < t \leq 1$, alors la fonction $s \mapsto t^{s-1}$ est décroissante, donc

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1} \leq t^{a-1} = \varphi(t).$$

— Si $t > 1$, alors la fonction $s \mapsto t^{s-1}$ est croissante, donc

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{b-1} e^{-t} = \varphi(t).$$

Ainsi,

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*, \quad t^{x-1} e^{-t} \leq \varphi(t).$$

Q11. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$,

$$\psi_k(t) = |\ln t|^k \varphi(t).$$

Sur $(0, 1]$. On a

$$\int_0^1 |\ln t|^k t^{a-1} dt = \int_0^{+\infty} u^k e^{-au} du$$

après le changement de variable $t = e^{-u}$. Cette intégrale converge.

Sur $[1, +\infty[$. Pour $t \geq 1$, on a $(\ln t)^k \leq t^k$, d'où

$$0 \leq \psi_k(t) = (\ln t)^k t^{b-1} e^{-t} \leq t^{b+k-1} e^{-t}.$$

Or, d'après la question Q8 appliquée à $x = b + k > 0$, la fonction $t \mapsto t^{b+k-1} e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc ψ_k est intégrable sur \mathbb{R}_+^* pour $k = 0, 1, 2$.

Q12. Fixons un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Posons

$$F(x, t) = t^{x-1} e^{-t} \quad ((x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*).$$

Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^2 et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = t^{x-1} e^{-t} \ln t, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, t) = t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^2.$$

Par Q10 et Q11,

$$|F(x, t)| \leq \psi_0(t), \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi_1(t), \quad \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \psi_2(t),$$

et les fonctions ψ_0, ψ_1, ψ_2 sont intégrables sur \mathbb{R}_+^* .

On peut donc dériver sous le signe intégral une fois puis deux fois. Il vient, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt, \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^2 dt.$$

Comme $[a, b]$ est arbitraire, on conclut que Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .

Q13. Pour $u, v \in \mathcal{C}^0([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, on pose

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(t)v(t) dt.$$

La bilinéarité et la symétrie sont immédiates. Enfin,

$$(u, u) = \int_{\alpha}^{\beta} u(t)^2 dt \geq 0.$$

Si $(u, u) = 0$, alors l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle ; on en déduit $u(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, donc $u = 0$. Ainsi, (\cdot, \cdot) est bien un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([\alpha, \beta], \mathbb{R})$.

Q14. Fixons $x > 0$ et posons

$$u_x(t) = t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}, \quad v_x(t) = \ln(t) t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}.$$

Alors

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u_x(t)^2 dt, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} u_x(t)v_x(t) dt, \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} v_x(t)^2 dt.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[1/n, n]$ puis en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient déjà

$$(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x).$$

Montrons que l'inégalité est stricte. Sur le segment $I = [1/2, 2]$, les fonctions u_x et v_x sont continues et ne sont pas proportionnelles, car $\ln t$ n'est pas constante sur I . Donc, d'après Q13 et Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_I u_x v_x \right| < \left(\int_I u_x^2 \right)^{1/2} \left(\int_I v_x^2 \right)^{1/2}.$$

Sur $J =]0, +\infty[\setminus I$, Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \int_J u_x v_x \right| \leq \left(\int_J u_x^2 \right)^{1/2} \left(\int_J v_x^2 \right)^{1/2}.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |\Gamma'(x)| &\leq \left| \int_I u_x v_x \right| + \left| \int_J u_x v_x \right| \\ &< \left(\int_I u_x^2 \right)^{1/2} \left(\int_I v_x^2 \right)^{1/2} + \left(\int_J u_x^2 \right)^{1/2} \left(\int_J v_x^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} u_x^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} v_x^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\Gamma(x)\Gamma''(x)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x > 0, \quad (\Gamma'(x))^2 < \Gamma(x)\Gamma''(x).}$$

On en déduit

$$(\ln \Gamma)''(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{\Gamma(x)^2} > 0,$$

donc $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur \mathbb{R}_+^* .

En outre, d'après Q8, $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x > 0$; d'après Q9, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; enfin

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

La fonction Γ vérifie donc bien (S).

Unicité

On suppose désormais que $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifie (S), et l'on pose

$$g(x) = \ln(f(x)).$$

Q15. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$f(x+n) = x(x+1) \cdots (x+n-1)f(x).$$

Pour $n = 0$, c'est trivial. Supposons le résultat vrai au rang n . Alors, en utilisant la relation fonctionnelle de f ,

$$\begin{aligned} f(x+n+1) &= (x+n)f(x+n) \\ &= (x+n)x(x+1) \cdots (x+n-1)f(x), \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

En prenant $x = 1$, on obtient

$$f(n+1) = 1 \cdot 2 \cdots n = n!.$$

Par conséquent,

$$g(n+1) = \ln(f(n+1)) = \ln(n!).$$

Q16. La question précédente donne, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x+n+1) = x(x+1) \cdots (x+n)f(x).$$

En prenant le logarithme,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x+n+1) = g(x) + \ln(x(x+1) \cdots (x+n)).}$$

Q17. Soient $x \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction g est convexe. On applique le lemme avec $a = n+1$.

— En prenant $x_1 = n$ et $y_1 = n+1+x$, on obtient

$$\frac{g(n) - g(n+1)}{n - (n+1)} \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x},$$

soit

$$g(n+1) - g(n) \leq \frac{g(x+n+1) - g(n+1)}{x}.$$

— En prenant $x_2 = n+1+x$ et $y_2 = n+2$, on obtient

$$\frac{g(x+n+1) - g(n+1)}{x} \leq \frac{g(n+2) - g(n+1)}{1},$$

soit

$$\frac{g(x+n+1) - g(n+1)}{x} \leq g(n+2) - g(n+1).$$

Finalement,

$$\boxed{g(n+1) - g(n) \leq \frac{g(x+n+1) - g(n+1)}{x} \leq g(n+2) - g(n+1).}$$

Q18. Par Q15,

$$g(n+1) - g(n) = \ln n, \quad g(n+2) - g(n+1) = \ln(n+1).$$

De plus, Q16 donne

$$g(x+n+1) - g(n+1) = g(x) + \ln(x(x+1) \cdots (x+n)) - \ln(n!).$$

En reportant dans l'encadrement de Q17, on obtient

$$\ln n \leq \frac{g(x) + \ln(x(x+1) \cdots (x+n)) - \ln(n!)}{x} \leq \ln(n+1).$$

On multiplie par $x > 0$, puis on exponentie :

$$\frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \leq f(x) \leq \frac{(n+1)^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

Le quotient du majorant par le minorant vaut $((n+1)/n)^x \rightarrow 1$. Par encadrement,

$$\forall x \in]0, 1], \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

Q19. D'après Q14, la fonction Γ vérifie elle aussi (S). On peut donc lui appliquer le résultat de Q18. Pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

Comme la même formule vaut pour $f(x)$, on obtient

$$\forall x \in]0, 1], \quad f(x) = \Gamma(x).$$

Q20. Soit $x > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ et $y \in]0, 1]$ tels que $x = y + n$. Alors, par Q15,

$$f(x) = y(y+1) \cdots (y+n-1)f(y).$$

Or, par Q19, $f(y) = \Gamma(y)$, et par la relation $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$,

$$\Gamma(x) = y(y+1) \cdots (y+n-1)\Gamma(y).$$

Les deux quantités sont donc égales. Ainsi

$$f = \Gamma.$$

Problème – Étude d'une classe d'endomorphismes

On note \mathcal{D} l'ensemble des endomorphismes vérifiant l'une des deux propriétés équivalentes de l'énoncé.

Partie I – Deux exemples

Dans cette partie, $E = \mathbb{K}_2[X]$, muni de sa base canonique $(1, X, X^2)$.

Étude de u

Q21. Pour $u(P) = X^2P'' + P'$, on calcule

$$u(1) = 0, \quad u(X) = 1, \quad u(X^2) = 2X + 2X^2.$$

Ainsi,

$$\text{Mat}_{(1,X,X^2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure ; ses valeurs propres sont donc 0 (de multiplicité algébrique 2) et 2.

Or

$$\text{Ker}(u) = \{a + bX + cX^2 \in E \mid b = 0, c = 0\} = \text{Vect}(1),$$

donc $\dim \text{Ker}(u) = 1$. L'espace propre associé à 0 n'a donc pas la bonne dimension pour une diagonalisation. Ainsi u n'est pas diagonalisable.

Q22. Soit $P = a + bX + cX^2$. Alors

$$u(P) = b + 2cX + 2cX^2,$$

puis

$$u^2(P) = u(b + 2cX + 2cX^2) = 2c + 4cX + 4cX^2.$$

Ainsi,

$$u^2(P) = 0 \iff c = 0.$$

Donc

$$\text{Ker}(u^2) = \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}_1[X].$$

Ce sous-espace est stable par u , car

$$u(a + bX) = b \in \mathbb{K}_1[X].$$

Q23. Cherchons un vecteur propre pour la valeur propre 2. On vérifie que

$$e_1 = 1 + 2X + 2X^2$$

satisfait

$$u(e_1) = 2e_1.$$

Posons en outre

$$e_2 = 1, \quad e_3 = X.$$

Alors

$$u(e_2) = 0, \quad u(e_3) = e_2.$$

Dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on obtient donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice est diagonale par blocs avec un bloc de taille 1 et un bloc de taille 2. Donc

$$\boxed{u \in \mathcal{D}.}$$

Étude de v

Q24. Pour $v(P) = P'$, on a

$$v(1) = 0, \quad v(X) = 1, \quad v(X^2) = 2X.$$

D'où

$$\text{Mat}_{(1, X, X^2)}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q25. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension 1 stable par v . Il existe alors un polynôme non nul P et un scalaire λ tels que

$$F = \text{Vect}(P) \quad \text{et} \quad v(P) = P' = \lambda P.$$

Si $\deg P \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$, ce qui est impossible puisque $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ lorsque $\lambda \neq 0$. Donc nécessairement $\lambda = 0$, puis $P' = 0$, donc P est constant.

Ainsi, le seul sous-espace de dimension 1 stable par v est

$$\boxed{\text{Vect}(1) = \mathbb{K}_0[X].}$$

Q26. Soit F un sous-espace de dimension 2 stable par v . La restriction $v|_F : F \rightarrow F$ n'est pas injective (c'est un endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension finie), donc il existe $0 \neq P \in F$ tel que $P' = 0$. Ainsi P est constant, donc

$$1 \in F.$$

Choisissons maintenant $Q \in F \setminus \text{Vect}(1)$.

- Si $\deg Q = 1$, alors $F = \text{Vect}(1, Q) = \mathbb{K}_1[X]$.
- Si $\deg Q = 2$, alors, comme F est stable, $Q' \in F$, et Q' est de degré 1. Le sous-espace $\text{Vect}(1, Q')$ est de dimension 2 et contenu dans F , donc

$$F = \text{Vect}(1, Q') = \mathbb{K}_1[X].$$

Ainsi, $\mathbb{K}_1[X]$ est l'unique sous-espace de dimension 2 stable par v .

Q27. Dans un espace de dimension 3, un endomorphisme appartenant à \mathcal{D} devrait admettre soit une décomposition en trois droites stables, soit une décomposition en somme directe d'une droite stable et d'un plan stable.

Or, d'après Q25 et Q26, le seul sous-espace stable de dimension 1 est $\mathbb{K}_0[X]$ et le seul sous-espace stable de dimension 2 est $\mathbb{K}_1[X]$. Ces deux sous-espaces ne sont pas supplémentaires, puisqu'on a

$$\mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}_1[X].$$

On ne peut donc obtenir aucune des décompositions demandées.

Ainsi,

$$\boxed{v \notin \mathcal{D}.}$$

Q28. Considérons

$$w = v - u.$$

Pour tout $P \in E$,

$$w(P) = P' - (X^2 P'' + P') = -X^2 P''.$$

On calcule alors

$$w(1) = 0, \quad w(X) = 0, \quad w(X^2) = -2X^2,$$

donc

$$\text{Mat}_{(1, X, X^2)}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonale : $w \in \mathcal{D}$.

Mais on a $u \in \mathcal{D}$, $w \in \mathcal{D}$ et

$$u + w = v \notin \mathcal{D}.$$

Donc \mathcal{D} n'est pas stable par addition. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E).}$$

Partie II – Le cas des endomorphismes nilpotents

On note \mathcal{N} l'ensemble des endomorphismes nilpotents de E , et

$$\mathcal{N}_2 = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u^2 = 0\}.$$

Q29. Si $\dim E = 1$ et si u est nilpotent, alors sa matrice dans une base est un scalaire λ tel que $\lambda^k = 0$ pour un certain k , donc $\lambda = 0$. Ainsi

$$\boxed{u = 0.}$$

Q30. Supposons $\dim E = 2$ et $u \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$. Montrons que la famille

$$(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \dots, u(x), x)$$

est libre.

Soit

$$a_0 u^{k-1}(x) + a_1 u^{k-2}(x) + \dots + a_{k-1} x = 0.$$

En appliquant u^{k-1} , on obtient

$$a_{k-1} u^{k-1}(x) = 0,$$

donc $a_{k-1} = 0$. En appliquant ensuite successivement u^{k-2} , u^{k-3} , \dots , on obtient de proche en proche

$$a_{k-2} = a_{k-3} = \dots = a_0 = 0.$$

La famille est donc libre.

Q31. La famille de Q30 comporte k vecteurs libres dans un espace de dimension 2; on a donc $k \leq 2$. Comme $u \neq 0$, on a nécessairement $k \neq 1$, donc

$$k = 2.$$

Par définition de l'indice de nilpotence,

$$u^2 = 0,$$

si bien que

$$\boxed{u \in \mathcal{N}_2.}$$

Q32. Soit $u \in \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$. D'après la définition de \mathcal{D} , l'espace E se décompose en somme directe de sous-espaces stables de dimension 1 ou 2.

Sur chaque sous-espace stable de dimension 1, la restriction de u est nilpotente, donc nulle. Sur chaque sous-espace stable de dimension 2, la restriction de u est nilpotente ; d'après Q31, son carré est nul.

Ainsi, sur chaque bloc de la décomposition, le carré de u est nul. Donc $u^2 = 0$ sur E , ce qui prouve

$$\boxed{\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2.}$$

Q33. Supposons désormais $u \in \mathcal{N}_2$. Alors $u^2 = 0$, donc pour tout $x \in E$,

$$u(u(x)) = 0.$$

Autrement dit,

$$\text{Im } u \subset \text{Ker } u.$$

Si $r = \text{rg}(u) = \dim(\text{Im } u)$, le théorème du rang donne

$$\dim(\text{Ker } u) = n - r.$$

Comme $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$, on obtient

$$r \leq n - r.$$

Q34. On dispose d'une base (e_1, \dots, e_r) de $\text{Im } u$, complétée en une base (e_1, \dots, e_{n-r}) de $\text{Ker } u$. On choisit ensuite $f_1, \dots, f_r \in E$ tels que

$$u(f_i) = e_i \quad (1 \leq i \leq r).$$

Montrons que la famille

$$\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$$

est libre.

Supposons

$$\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^r \beta_j f_j = 0.$$

En appliquant u , et en utilisant $u(e_i) = 0$ pour tout i , il vient

$$\sum_{j=1}^r \beta_j e_j = 0.$$

Or (e_1, \dots, e_r) est libre ; donc $\beta_1 = \dots = \beta_r = 0$. On revient alors à

$$\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i = 0,$$

et comme (e_1, \dots, e_{n-r}) est libre, tous les α_i sont nuls.

La famille \mathcal{F} est donc libre. Comme elle contient $(n - r) + r = n$ vecteurs, c'est une base de E .

Q35. Considérons la base

$$\mathcal{B} = (e_{r+1}, \dots, e_{n-r}, e_1, f_1, \dots, e_r, f_r).$$

Dans cette base,

$$u(e_{r+1}) = \dots = u(e_{n-r}) = 0, \quad u(e_i) = 0, \quad u(f_i) = e_i \quad (1 \leq i \leq r).$$

Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} O_{n-2r} & & & \\ & J & & \\ & & \ddots & \\ & & & J \end{pmatrix},$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ apparaît r fois.

Q36. La question Q32 a montré

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2.$$

Réciproquement, si $u \in \mathcal{N}_2$, la question Q35 montre qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec des blocs de taille 1 ou 2. Donc $u \in \mathcal{D}$, et bien sûr $u \in \mathcal{N}$.

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{N}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}.}$$

Partie III – Un critère d'appartenance à \mathcal{D}

Q37. On considère l'application

$$\varphi : \mathbb{K}_1[X]^2 \longrightarrow \mathbb{K}_3[X], \quad (A, B) \longmapsto (X - a)^2 A + (X - b)^2 B,$$

où $a \neq b$.

Les espaces $\mathbb{K}_1[X]^2$ et $\mathbb{K}_3[X]$ sont tous deux de dimension 4. Il suffit donc de montrer que φ est injective.

Supposons

$$(X - a)^2 A + (X - b)^2 B = 0.$$

En évaluant en $X = a$, on obtient $(a - b)^2 B(a) = 0$, donc $B(a) = 0$. En dérivant, puis en évaluant encore en a , on obtient $(a - b)^2 B'(a) = 0$, donc $B'(a) = 0$. Comme B est de degré au plus 1, cela impose $B = 0$. Alors $(X - a)^2 A = 0$, donc $A = 0$.

Ainsi φ est injective, donc bijective. En particulier, le polynôme constant 1 admet un antécédent : il existe $(A, B) \in \mathbb{K}_1[X]^2$ tel que

$$\boxed{(X - a)^2 A + (X - b)^2 B = 1.}$$

Q38. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ distincts et $x \in \text{Ker}((u - a\text{Id}_E)^2) \cap \text{Ker}((u - b\text{Id}_E)^2)$.

D'après Q37, il existe $A, B \in \mathbb{K}_1[X]$ tels que

$$(X - a)^2 A + (X - b)^2 B = 1.$$

En substituant u à X ,

$$\text{Id}_E = (u - a\text{Id}_E)^2 A(u) + (u - b\text{Id}_E)^2 B(u).$$

En appliquant cette identité à x , on obtient

$$x = (u - a\text{Id}_E)^2 A(u)x + (u - b\text{Id}_E)^2 B(u)x = 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{Ker}((u - a\text{Id}_E)^2) \cap \text{Ker}((u - b\text{Id}_E)^2) = \{0\}.$$

Q39. Soient $x_i \in \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E)$ tels que

$$x_1 + \dots + x_p = 0.$$

Fixons $i \in \{1, \dots, p\}$. En appliquant l'endomorphisme

$$\prod_{\ell \neq i} (u - \alpha_\ell \text{Id}_E)$$

à cette relation, tous les termes s'annulent sauf le i -ième, et il reste

$$\left(\prod_{\ell \neq i} (\alpha_i - \alpha_\ell) \right) x_i = 0.$$

Le coefficient est non nul puisque les α_i sont deux à deux distincts. Donc $x_i = 0$. Ceci vaut pour tout i , d'où

$$\boxed{\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) \text{ est une somme directe.}}$$

Q40. Posons

$$E_i = \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E), \quad F_j = \text{Ker}((u - \beta_j \text{Id}_E)^2).$$

Supposons qu'on ait une relation

$$\sum_{i=1}^p x_i + \sum_{j=1}^q y_j = 0, \quad x_i \in E_i, \quad y_j \in F_j.$$

Étape 1 : annulation des x_i . Pour i fixé, on applique

$$S_i(u), \quad S_i(X) = \prod_{\ell \neq i} (X - \alpha_\ell) \prod_{m=1}^q (X - \beta_m)^2.$$

Alors $S_i(u)$ annule tous les x_ℓ pour $\ell \neq i$, tous les y_m , et

$$S_i(u)x_i = S_i(\alpha_i)x_i.$$

Comme $S_i(\alpha_i) \neq 0$, on obtient $x_i = 0$. Ceci vaut pour tout i .

La relation se réduit donc à

$$\sum_{j=1}^q y_j = 0.$$

Étape 2 : les y_j sont en fait des vecteurs propres. Pour j fixé, on applique

$$T_j(u), \quad T_j(X) = (X - \beta_j) \prod_{m \neq j} (X - \beta_m)^2.$$

Alors $T_j(u)y_m = 0$ pour $m \neq j$, et

$$T_j(u)y_j = \left(\prod_{m \neq j} (\beta_j - \beta_m)^2 \right) (u - \beta_j \text{Id}_E)y_j.$$

Le coefficient est non nul, donc

$$(u - \beta_j \text{Id}_E)y_j = 0.$$

Ainsi $y_j \in \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)$.

On a finalement une relation entre vecteurs appartenant à des espaces propres associés à des valeurs propres toutes distinctes (les α_i et les β_j sont distincts deux à deux). Par Q39, tous ces vecteurs sont nuls. D'où

$$\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}((u - \beta_j \text{Id}_E)^2) \text{ est une somme directe.}$$

Q41. On considère

$$P = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i) \prod_{j=1}^q (X - \beta_j)^2.$$

Pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$, on écrit

$$P = (X - \alpha_i)P_i, \quad P = (X - \beta_j)Q_j, \quad P = (X - \beta_j)^2 R_j.$$

Montrons que la famille

$$\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_q)$$

est libre.

Considérons une relation linéaire

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j + \sum_{j=1}^q \nu_j R_j = 0.$$

— En évaluant en α_i , tous les termes s'annulent sauf $\lambda_i P_i(\alpha_i)$, avec

$$P_i(\alpha_i) = \prod_{\ell \neq i} (\alpha_i - \alpha_\ell) \prod_{m=1}^q (\alpha_i - \beta_m)^2 \neq 0.$$

On obtient donc $\lambda_i = 0$ pour tout i .

— En évaluant ensuite en β_j , tous les termes s'annulent sauf $\nu_j R_j(\beta_j)$, avec

$$R_j(\beta_j) = \prod_{i=1}^p (\beta_j - \alpha_i) \prod_{m \neq j} (\beta_j - \beta_m)^2 \neq 0.$$

Ainsi $\nu_j = 0$ pour tout j .

— Il reste une relation $\sum_{j=1}^q \mu_j Q_j = 0$. En dérivant puis en évaluant en β_j , tous les termes s'annulent sauf $\mu_j Q'_j(\beta_j)$. Or

$$Q_j = (X - \beta_j)R_j \quad \Rightarrow \quad Q'_j(\beta_j) = R_j(\beta_j) \neq 0.$$

Donc $\mu_j = 0$ pour tout j .

La famille \mathcal{B} est libre.

Elle contient $p + 2q$ polynômes. Or

$$\dim(\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]) = p + 2q.$$

On en déduit que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$.

Q42. On suppose désormais que le polynôme P annule u , c'est-à-dire $P(u) = 0$.

Comme \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$, le polynôme constant 1 s'écrit

$$1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j + \sum_{j=1}^q \nu_j R_j.$$

En substituant u à X , on obtient

$$\text{Id}_E = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i(u) + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j(u) + \sum_{j=1}^q \nu_j R_j(u).$$

Pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i(u)x + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j(u)x + \sum_{j=1}^q \nu_j R_j(u)x.$$

Or,

$$(u - \alpha_i \text{Id}_E)P_i(u) = P(u) = 0,$$

donc $P_i(u)x \in \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E)$. De même,

$$(u - \beta_j \text{Id}_E)Q_j(u) = P(u) = 0,$$

donc $Q_j(u)x \in \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E) \subset \text{Ker}((u - \beta_j \text{Id}_E)^2)$, et

$$(u - \beta_j \text{Id}_E)^2 R_j(u) = P(u) = 0,$$

donc $R_j(u)x \in \text{Ker}((u - \beta_j \text{Id}_E)^2)$.

Ainsi, tout vecteur de E appartient à la somme

$$\sum_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) + \sum_{j=1}^q \text{Ker}((u - \beta_j \text{Id}_E)^2).$$

La question Q40 assure que cette somme est directe. On conclut donc que

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}((u - \beta_j \text{Id}_E)^2).$$

Q43. Pour tout i , l'endomorphisme induit par u sur

$$E_i = \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E)$$

est simplement $\alpha_i \text{Id}_{E_i}$. En choisissant une base de E_i , on décompose donc E_i en somme directe de droites stables par u .

Pour tout j , posons

$$F_j = \text{Ker}((u - \beta_j \text{Id}_E)^2), \quad w_j = u|_{F_j} - \beta_j \text{Id}_{F_j}.$$

Alors

$$w_j^2 = (u - \beta_j \text{Id}_E)|_{F_j}^2 = 0.$$

L'endomorphisme w_j est donc nilpotent d'ordre au plus 2 sur l'espace F_j . D'après le résultat de Q36 appliqué à F_j , l'endomorphisme w_j appartient à \mathcal{D} sur F_j . Il existe donc une décomposition de F_j en somme directe de sous-espaces de dimension 1 ou 2 stables par w_j . Comme

$$u|_{F_j} = \beta_j \text{Id}_{F_j} + w_j,$$

ces mêmes sous-espaces sont aussi stables par u .

En combinant ces décompositions avec celle de Q42, on obtient une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u , tous de dimension 1 ou 2. Par définition,

$$u \in \mathcal{D}.$$

Fin de la correction