Correction détaillée

Sujet de mathématiques MPI – session 2026

Sujet fourni par l'utilisateur

Les trois exercices sont indépendants. On rédige ci-dessous une correction complète, question par question.

Exercice 1

Questions préliminaires

1. Convexité de $\varphi : t \mapsto t^n$ sur $]0,1[$.

Comme $n \geq 2$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$ et

$$\varphi'(t) = nt^{n-1}, \qquad \varphi''(t) = n(n-1)t^{n-2}.$$

Pour tout $t \in]0,1[$, on a $t^{n-2} > 0$, donc

$$\varphi''(t) = n(n-1)t^{n-2} > 0.$$

Ainsi, φ est **strictement convexe** sur $]0,1[$.

2. Inégalité de Jensen pour cette fonction.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ tels que

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1,$$

et soient $t_1, \dots, t_m \in]0,1[$. Alors, par convexité de φ,

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i t_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi(t_i),$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i t_i\right)^n \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i t_i^n.$$

Comme φ est strictement convexe, il y a égalité si et seulement si $t_1 = \cdots = t_m$.

3. Matrice J.

On note $J \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

3.1. Polynôme annulateur de degré 2.

Chaque coefficient de J^2 est la somme de p termes égaux à 1, donc

$$J^2 = pJ.$$

Ainsi,

$$J(J - pI_p) = 0.$$

Le polynôme

$$P(X) = X(X-p)$$

annule donc J.

3.2. Valeurs propres possibles de $I_p + J$.

Si μ est une valeur propre de J, alors $P(\mu) = 0$, donc $\mu \in \{0, p\}$. Les valeurs propres de $I_p + J$ sont donc de la forme $1 + \mu$, avec $\mu \in \{0, p\}$, soit

$$\mathrm{Sp}(I_p + J) \subset \{1, p + 1\}.$$

Ainsi les seules valeurs propres possibles sont 1 et $p + 1$.

3.3. $I_p + J$ est définie positive.

La matrice $I_p + J$ est symétrique réelle. Ses valeurs propres possibles sont 1 et $p + 1$, qui sont strictement positives. Une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont strictement positives est définie positive. Donc

$$I_p + J \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R}).$$

4. Une expression de l'espérance de X

On effectue n épreuves indépendantes, chaque résultat a_j ayant probabilité x_j. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, r\}$, la variable X_j vaut 1 si a_j n'apparaît jamais, et 0 sinon.

4.1. Loi de X_j.

À une épreuve donnée, la probabilité de ne pas obtenir a_j vaut $1 - x_j$. Par indépendance des n épreuves,

$$\mathbb{P}(X_j = 1) = (1 - x_j)^n.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X_j = 0) = 1 - (1 - x_j)^n.$$

Ainsi X_j suit une loi de Bernoulli de paramètre $(1 - x_j)^n$.

4.2. Expression de X à l'aide des X_j.

La variable X compte le nombre de résultats absents après les n épreuves. Or X_j vaut précisément 1 lorsque a_j est absent, et 0 sinon. Donc

$$X = \sum_{j=1}^{r} X_j.$$

4.3. Calcul de $\mathbb{E}(X)$.

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{r} \mathbb{E}(X_j).$$

Or, pour une Bernoulli de paramètre $(1 - x_j)^n$,

$$\mathbb{E}(X_j) = (1 - x_j)^n.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{r} (1 - x_j)^n.}$$

5. Recherche du minimum

On cherche à minimiser

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{j=1}^{r} (1 - x_j)^n$$

sous les contraintes

$$x_j > 0 \quad (1 \leq j \leq r), \qquad \sum_{j=1}^{r} x_j = 1.$$

On pose

$$U = \Big\{(x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1} \ ; \ x_j > 0 \ (1 \leq j \leq r-1), \ \sum_{j=1}^{r-1} x_j < 1\Big\}.$$

Alors nécessairement

$$x_r = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} x_j.$$

5.1. Représentation de U dans le cas $r = 3$.

Si $r = 3$, alors

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ x_1 + x_2 < 1\}.$$

C'est l'intérieur du triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

5.2. U est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{r-1}$.

Les conditions $x_j > 0$ et $\sum_{j=1}^{r-1} x_j < 1$ sont des inégalités strictes définissant des ouverts. Donc U est un ouvert.

De plus, pour tout $(x_1, \dots, x_{r-1}) \in U$, on a

$$0 < x_j < 1 \qquad (1 \leq j \leq r-1),$$

car $x_j > 0$ et la somme de ces coordonnées est < 1. Ainsi

$$U \subset (0, 1)^{r-1},$$

donc U est borné.

5.3. Définition de h.

Si $(x_1, \dots, x_{r-1}) \in U$, on pose

$$S = x_1 + \cdots + x_{r-1}, \qquad x_r = 1 - S.$$

Alors

$$1 - x_r = S.$$

On définit donc

$$\boxed{h(x_1, \dots, x_{r-1}) = \sum_{j=1}^{r-1} (1 - x_j)^n + \left(\sum_{j=1}^{r-1} x_j\right)^n.}$$

Par construction, on a bien

$$h(x_1, \dots, x_{r-1}) = \mathbb{E}(X).$$

5.4. h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

La fonction h est une somme de polynômes en les variables $x_1, \dots, x_{r-1}$. Elle est donc même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{r-1}$, a fortiori de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

5.5. Recherche des points critiques de h.

Posons encore

$$S = x_1 + \cdots + x_{r-1}.$$

Alors

$$h(x_1, \dots, x_{r-1}) = \sum_{j=1}^{r-1} (1 - x_j)^n + S^n.$$

5.5.1. Pour $j \in \{1, \dots, r-1\}$,

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{r-1}) = -n(1-x_j)^{n-1} + nS^{n-1}.$$

Donc

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x_j}(m) = n\Big(S^{n-1} - (1-x_j)^{n-1}\Big)}$$

pour $m = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in U$.

5.5.2. Un point critique $b = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in U$ vérifie, pour tout j,

$$S^{n-1} = (1-x_j)^{n-1}.$$

Comme les quantités en jeu sont strictement positives, on en déduit

$$S = 1 - x_j \qquad (1 \leq j \leq r-1).$$

Ainsi

$$x_1 = \cdots = x_{r-1} = 1 - S.$$

En sommant ces égalités,

$$S = (r-1)(1-S),$$

donc

$$rS = r - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad S = \frac{r-1}{r}.$$

Par conséquent

$$\boxed{b = \left(\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r}\right).}$$

C'est l'unique point critique de h sur U.

5.6. Conclusion.

5.6.1. Calculons la matrice hessienne. Pour $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = n(n-1)S^{n-2},$$

et pour $i = j$,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} = n(n-1)\Big((1-x_j)^{n-2} + S^{n-2}\Big).$$

Au point critique b, on a

$$S = \frac{r-1}{r}, \qquad 1 - x_j = \frac{r-1}{r}.$$

Donc

$$\operatorname{Hess}(h)(b) = n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2}(I_{r-1} + J_{r-1}).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\operatorname{Hess}(h)(b) = n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2}(I_{r-1} + J_{r-1}).}$$

5.6.2. D'après la question préliminaire 3, la matrice $I_{r-1} + J_{r-1}$ est définie positive. Le facteur scalaire

$$n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2}$$

est strictement positif. Ainsi $\operatorname{Hess}(h)(b)$ est définie positive.

Comme b est un point critique et que la hessienne en b est définie positive, b est un **minimum local strict** de h.

Donc $\mathbb{E}(X)$ admet un minimum local pour

$$\boxed{x_1 = \cdots = x_r = \frac{1}{r}.}$$

5.6.3. Pour obtenir le minimum global, on applique Jensen à la fonction strictement convexe $\varphi(t) = t^n$ aux nombres

$$t_j = 1 - x_j \in]0, 1[,$$

avec les poids tous égaux à $\frac{1}{r}$. On obtient

$$\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(1 - x_j)^n \geq \left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}(1 - x_j)\right)^n.$$

Or

$$\sum_{j=1}^{r}(1 - x_j) = r - \sum_{j=1}^{r} x_j = r - 1.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{r}(1 - x_j)^n \geq r\left(\frac{r-1}{r}\right)^n.$$

Il y a égalité si et seulement si

$$1 - x_1 = \cdots = 1 - x_r,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\boxed{x_1 = \cdots = x_r = \frac{1}{r}.}$$

Ainsi, l'espérance est minimale, et seulement dans ce cas, pour la loi uniforme.

Exercice 2

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on considère

$$E_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right),$$

et pour $k \geq 2$,

$$E_k(x) = \frac{1}{x^k} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(x-n)^k} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(x+n)^k}.$$

Question de cours

1. La série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.

2. La série entière géométrique $\sum\limits_{k\geq 0} x^k$ converge pour $|x| < 1$, et dans cet intervalle sa somme vaut

$$\sum_{k\geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Son intervalle de convergence est $] - 1, 1[$.

3. Existence de $E_1(x)$

Fixons $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et posons

$$u_n(x) = \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} = \frac{2x}{x^2-n^2}.$$

Quand $n \to +\infty$,

$$u_n(x) \sim -\frac{2x}{n^2}.$$

Ainsi, $|\nu_n(x)|$ est équivalent à une constante fois $1/n^2$, et la série

$$\sum_{n\geq 1} \nu_n(x)$$

converge absolument. Comme $1/x$ est bien défini, $E_1(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4. Existence de $E_k(x)$ pour $k \geq 2$

4.1. Pour $k \geq 2$, lorsque $n \to +\infty$,

$$\frac{1}{(x-n)^k} \sim \frac{(-1)^k}{n^k}, \qquad \frac{1}{(x+n)^k} \sim \frac{1}{n^k}.$$

Les deux séries

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x-n)^k}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+n)^k}$$

convergent donc absolument par comparaison avec une série de Riemann d'exposant $k > 1$.

4.2. On en déduit immédiatement que $E_k(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et tout $k \geq 2$.

5. Périodicité et parité

5.1. 1-périodicité.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En réindexant,

$$\begin{aligned}
E_k(x+1) &= \frac{1}{(x+1)^k} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+1-n)^k} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+1+n)^k} \\
&= \left(\frac{1}{x^k} + \sum_{m\geq 1} \frac{1}{(x-m)^k} \right) + \left(\frac{1}{(x+1)^k} + \sum_{m\geq 2} \frac{1}{(x+m)^k} \right) \\
&= \frac{1}{x^k} + \sum_{m\geq 1} \frac{1}{(x-m)^k} + \sum_{m\geq 1} \frac{1}{(x+m)^k} \\
&= E_k(x).
\end{aligned}$$

Donc E_k est 1-périodique.

5.2. Parité.

On calcule

$$\begin{aligned}
E_k(-x) &= \frac{1}{(-x)^k} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(-x-n)^k} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(-x+n)^k} \\
&= (-1)^k \left(\frac{1}{x^k} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+n)^k} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x-n)^k} \right) \\
&= (-1)^k E_k(x).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E_k(-x) = (-1)^k E_k(x).}$$

La fonction E_k est donc paire si k est pair, et impaire si k est impair.

6. Relation de récurrence

6.1. Soit $I = [a, b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Cas $k \geq 2$. Pour n assez grand et pour tout $x \in I$, on a $|x \pm n| \geq n/2$. Donc

$$\sup_{x\in I} \left| \frac{1}{(x \pm n)^k} \right| \leq \frac{2^k}{n^k}, \qquad \sup_{x\in I} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{(x \pm n)^k} \right| \leq \frac{k2^{k+1}}{n^{k+1}}.$$

Les séries de fonctions définissant E_k et leurs séries dérivées convergent uniformément sur I par le critère de Weierstrass. On peut donc dériver terme à terme :

$$\begin{aligned} E_k'(x) &= -\frac{k}{x^{k+1}} - k \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x-n)^{k+1}} - k \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+n)^{k+1}} \\ &= -kE_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Cas $k = 1$. On pose

$$u_n(x) = \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}.$$

Sur I, on a pour n grand

$$\sup_{x\in I} |\nu_n(x)| \leq \frac{C_I}{n^2}, \qquad \sup_{x\in I} |\nu_n'(x)| \leq \frac{C_I'}{n^2}.$$

Là encore, la dérivation terme à terme est licite et donne

$$E_1'(x) = -\frac{1}{x^2} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x-n)^2} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+n)^2} = -E_2(x).$$

Dans tous les cas,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \qquad E_k'(x) = -kE_{k+1}(x).}$$

6.2. Comme E_1 est dérivable et $E_1' = -E_2$, puis $E_2' = -2E_3$, etc., on obtient par récurrence que E_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, puis que chaque E_k l'est aussi. En itérant la relation précédente,

$$E_1^{(k-1)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\, E_k(x).$$

Autrement dit,

$$\boxed{E_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}(x).}$$

7. Calcul d'une série géométrique dépendant de n

Soient $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $|\frac{x}{n}| < 1$,

$$\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - x/n} = \frac{1}{n-x}.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n-x}.}$$

8. Développement en double série

Pour $|x| < 1$ et $n \geq 1$, on a aussi
$$\frac{1}{n+x} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k x^k}{n^{k+1}}.$$

Par soustraction,
$$\begin{aligned}\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} &= \sum_{k\geq 0} \frac{(1-(-1)^k)x^k}{n^{k+1}} \\ &= 2\sum_{s\geq 1} \frac{x^{2s-1}}{n^{2s}}.\end{aligned}$$

Donc
$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right) = \sum_{n\geq 1}\sum_{s\geq 1} \frac{2x^{2s-1}}{n^{2s}},$$
à condition de justifier l'inversion des sommations.

Or
$$\sum_{n\geq 1}\sum_{s\geq 1}\left|\frac{2x^{2s-1}}{n^{2s}}\right| = 2\sum_{s\geq 1}|x|^{2s-1}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2s}} = 2\sum_{s\geq 1}|x|^{2s-1}\zeta(2s).$$
Comme $\zeta(2s) \leq \zeta(2)$ pour tout $s \geq 1$, cette somme est majorée par
$$2\zeta(2)\sum_{s\geq 1}|x|^{2s-1},$$
qui converge puisque $|x| < 1$. On peut donc appliquer Fubini/Tonelli aux séries absolument convergentes.

Ainsi,
$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right) = \sum_{n\geq 1}\sum_{s\geq 1}\frac{2}{n^{2s}}x^{2s-1}.}$$

9. Développement de E_1 sur $]-1,1[\setminus\{0\}$

Pour $0 < |x| < 1$,
$$\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} = -\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right).$$

Donc
$$\begin{aligned}E_1(x) &= \frac{1}{x} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right).\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente,
$$\begin{aligned}E_1(x) &= \frac{1}{x} - \sum_{n\geq 1}\sum_{s\geq 1}\frac{2x^{2s-1}}{n^{2s}} \\ &= \frac{1}{x} - 2\sum_{s\geq 1}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2s}}\right)x^{2s-1} \\ &= \frac{1}{x} - 2\sum_{s\geq 1}\zeta(2s)x^{2s-1}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, \qquad E_1(x) = \frac{1}{x} - 2\sum_{s\geq 1}\zeta(2s)x^{2s-1}.}$$

10. Développement de E_k

La série entière

$$\sum_{s\geq 1}\zeta(2s)x^{2s-1}$$

a un rayon de convergence au moins égal à 1 (les coefficients $\zeta(2s)$ sont bornés). Elle est donc dérivable terme à terme sur $]-1,1[$.

En utilisant la relation obtenue à la question 6.2,

$$E_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}E_1^{(k-1)}(x).$$

Or

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{1}{x}\right)^{(k-1)} = \frac{1}{x^k},$$

et, pour chaque $s \geq 1$,

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}(x^{2s-1}) = \frac{(2s-1)!}{(2s-k)!}x^{2s-k} = (k-1)!\binom{2s-1}{k-1}x^{2s-k},$$

avec la convention $\binom{m}{p} = 0$ si $p > m$.

On en déduit

$$E_k(x) = \frac{1}{x^k} + 2(-1)^k\sum_{s\geq 1}\binom{2s-1}{k-1}\zeta(2s)x^{2s-k}.$$

Donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, \qquad E_k(x) = \frac{1}{x^k} + 2(-1)^k\sum_{s\geq 1}\binom{2s-1}{k-1}\zeta(2s)x^{2s-k}.}$$

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on note

$$S = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2,$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K),$$

avec $a_1 \neq 0$.

1. Cas $K = \mathbb{R}$

1.1. M est diagonalisable.

Dans le cas réel, M est symétrique : $M^\top = M$. Par le théorème spectral, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée. Donc M est diagonalisable.

1.2. Rang de M.

Pour $1 \leq j \leq n-1$, la j-ième colonne de M vaut

$$C_j = a_j e_n,$$

donc toutes les $n-1$ premières colonnes sont colinéaires à e_n.

La dernière colonne vaut

$$C_n = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)^\top.$$

Comme $a_1 \neq 0$, le vecteur C_n n'est pas colinéaire à e_n. Ainsi l'espace engendré par les colonnes est de dimension 2, et

$$\boxed{\mathrm{rg}(M) = 2.}$$

1.3. 0 est valeur propre et son ordre de multiplicité.

Comme $\mathrm{rg}(M) = 2$, le théorème du rang donne

$$\dim \mathrm{Ker}(M) = n - 2.$$

Donc 0 est valeur propre, et sa multiplicité géométrique vaut $n-2$. Comme M est diagonalisable, multiplicité géométrique et multiplicité algébrique coïncident. Ainsi l'ordre de multiplicité de 0 est

$$\boxed{n-2.}$$

1.4. Existence de deux valeurs propres non nulles.

La matrice M est diagonalisable, de taille n, et 0 y apparaît avec multiplicité $n-2$. Il reste donc exactement deux valeurs propres non nulles (comptées avec multiplicité), que l'on note λ_1 et λ_2.

1.5. Base du sous-espace propre associé à 0.

Écrivons $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$. L'équation $MX = 0$ donne :

$$a_i x_n = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1), \qquad \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j + a_n x_n = 0.$$

Comme $a_1 \neq 0$, on obtient d'abord $x_n = 0$, puis

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j = 0.$$

Donc

$$E_0(M) = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)^\top \ ; \ \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j = 0 \right\}.$$

Une base pratique est donnée par les $n-2$ vecteurs

$$v_j = a_1 e_j - a_j e_1 \qquad (j = 2, \dots, n-1).$$

Ils appartiennent bien à $E_0(M)$ car

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i (v_j)_i = a_j a_1 - a_1 a_j = 0,$$

et ils sont libres. Donc

$$\boxed{(v_2, \dots, v_{n-1}) \text{ est une base de } E_0(M).}$$

1.6. Équation vérifiée par les valeurs propres non nulles.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $X = (x_1, \dots, x_n)^\top \neq 0$ tel que

$$MX = \lambda X.$$

Les $n-1$ premières équations donnent

$$a_i x_n = \lambda x_i \qquad (1 \leq i \leq n-1),$$

donc

$$x_i = \frac{a_i}{\lambda} x_n.$$

Si $x_n = 0$, alors tous les x_i seraient nuls, ce qui est impossible. Donc $x_n \neq 0$.

La dernière équation donne alors

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j + a_n x_n = \lambda x_n.$$

En remplaçant les x_j par leur expression,

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2\, x_n + a_n x_n = \lambda x_n.$$

Comme $x_n \neq 0$,

$$\frac{S}{\lambda} + a_n = \lambda,$$

soit encore

$$\boxed{\lambda^2 - a_n \lambda - S = 0.}$$

Les deux valeurs propres non nulles λ_1, λ_2 sont donc les solutions de cette équation.

1.7. Bases des sous-espaces propres associés à λ_1 et λ_2.

La relation précédente montre qu'un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle λ est nécessairement de la forme

$$X = \frac{x_n}{\lambda} (a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda)^\top.$$

Ainsi,

$$E_\lambda(M) = \mathrm{Vect}\big((a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda)^\top\big).$$

En particulier,

$$\boxed{E_{\lambda_i}(M) = \mathrm{Vect}(u_i), \qquad u_i = (a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda_i)^\top \quad (i = 1, 2).}$$

1.8. Construction de P.

Les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Comme M est diagonalisable, la famille

$$\mathcal{B} = (v_2, \dots, v_{n-1}, u_1, u_2)$$

est une base de $\mathbb{R}^n$.

On définit P comme la matrice ayant pour colonnes les vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$P = \big(v_2 \ \cdots \ v_{n-1} \ u_1 \ u_2\big).$$

Alors P est inversible et, dans cette base,

$$P^{-1}MP = \mathrm{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2 \text{ fois}}, \lambda_1, \lambda_2).$$

Donc

$$\boxed{P^{-1}MP = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2).}$$

2. Cas $K = \mathbb{C}$

2.1. Caractérisation de la non-diagonalisabilité.

On commence par calculer le polynôme caractéristique. Pour $X \neq 0$, en utilisant le complément de Schur sur le bloc XI_{n-1},

$$\begin{aligned}\chi_M(X) &= \det(XI_n - M)\\ &= \det(XI_{n-1})\left(X - a_n - (-a_1, \dots, -a_{n-1})\frac{1}{X}\begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1}\end{pmatrix}\right)\\ &= X^{n-1}\left(X - a_n - \frac{S}{X}\right)\\ &= X^{n-2}(X^2 - a_nX - S).\end{aligned}$$

Comme les deux membres sont des polynômes et coïncident pour tout $X \neq 0$, on a partout

$$\boxed{\chi_M(X) = X^{n-2}(X^2 - a_nX - S).}$$

Par ailleurs, comme précédemment,

$$\dim E_0(M) = \dim \operatorname{Ker}(M) = n - 2,$$

et si $\lambda \neq 0$ vérifie $\lambda^2 - a_n\lambda - S = 0$, alors

$$E_\lambda(M) = \operatorname{Vect}\big((a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda)^\top\big),$$

donc $\dim E_\lambda(M) = 1$.

Premier cas : $S = 0$.

Alors

$$\chi_M(X) = X^{n-1}(X - a_n).$$

La valeur propre 0 est donc de multiplicité algébrique $n-1$, alors que sa multiplicité géométrique vaut $n - 2$. La matrice M n'est donc pas diagonalisable.

Deuxième cas : $S \neq 0$ et $a_n^2 + 4S = 0$.

Le polynôme $X^2 - a_nX - S$ admet alors une racine double non nulle

$$\lambda = \frac{a_n}{2}.$$

La valeur propre λ est de multiplicité algébrique 2, tandis que

$$\dim E_\lambda(M) = 1.$$

Donc M n'est pas diagonalisable.

Réciproque.

Supposons maintenant

$$S \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta = a_n^2 + 4S \neq 0.$$

Alors le polynôme $X^2 - a_nX - S$ a deux racines distinctes et non nulles λ_1, λ_2. On dispose donc de :

- l'espace propre $E_0(M)$, de dimension $n - 2$;
- l'espace propre $E_{\lambda_1}(M)$, de dimension 1 ;
- l'espace propre $E_{\lambda_2}(M)$, de dimension 1.

Ces trois espaces propres sont en somme directe, car ils correspondent à des valeurs propres distinctes. Leur somme des dimensions vaut

$$(n-2)+1+1=n.$$

Ils forment donc une décomposition de $\mathbb{C}^n$ en somme directe d'espaces propres, ce qui prouve que M est diagonalisable.

On a finalement l'équivalence suivante :

$$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable} \iff \Big(S=0 \text{ ou } a_n^2+4S=0\Big)\,.}$$

Autrement dit,

$$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable} \iff \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \text{ ou } a_n^2 + 4\sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0\right).}$$

2.2. Exemple pour $n = 3$.

Prenons

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = i, \qquad a_3 = 0.$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{2} a_j^2 = 1 + i^2 = 1 - 1 = 0.$$

La matrice associée est donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix},$$

et, d'après la question précédente, elle n'est pas diagonalisable.