

Correction détaillée – Mathématiques PC

E3A Polytech – Session 2026

Exercice 1

Questions préliminaires

Soit g un endomorphisme d'un espace vectoriel réel H .

1. Soit μ une valeur propre de g . Il existe donc un vecteur $x \neq 0$ tel que

$$g(x) = \mu x.$$

En composant par g , on obtient

$$g^2(x) = g(g(x)) = g(\mu x) = \mu g(x) = \mu^2 x.$$

Comme $x \neq 0$, μ^2 est une valeur propre de g^2 .

2. Soit x un vecteur propre de g^2 associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$. Alors

$$g^2(x) = \lambda x, \quad x \neq 0.$$

D'abord, $g(x) \neq 0$, car sinon $g^2(x) = 0$, donc $\lambda x = 0$, ce qui contredit $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$.

De plus,

$$g^2(g(x)) = g(g^2(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Ainsi $g(x)$ est un vecteur propre de g^2 , associé à la même valeur propre λ .

3. Soient $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres de g . Si

$$x \in E_\lambda(g) \cap E_\mu(g),$$

alors

$$g(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad g(x) = \mu x.$$

Donc $(\lambda - \mu)x = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, on obtient $x = 0$.

Ainsi

$$E_\lambda(g) \cap E_\mu(g) = \{0\},$$

donc deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

4. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\det(-A) = \det((-1)A) = (-1)^n \det(A).$$

Par ailleurs, le déterminant est invariant par transposition :

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Étude de l'endomorphisme f

On travaille dans $E = \mathbb{R}^5$, muni du produit scalaire usuel. Dans la base canonique orthonormée, la matrice de f est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Premières propriétés de l'endomorphisme f

5.1. On remarque immédiatement que les coefficients de M^T sont les opposés de ceux de M . Donc

$$M^T = -M,$$

et par suite

$$\boxed{M + M^T = 0.}$$

5.2. Comme $M^T = -M$ et comme M est d'ordre 5, on a, grâce aux questions préliminaires,

$$\det(M) = \det(M^T) = \det(-M) = (-1)^5 \det(M) = -\det(M).$$

Donc $2 \det(M) = 0$, d'où

$$\det(M) = 0.$$

Ainsi M n'est pas inversible, donc f n'est pas un automorphisme de E .

5.3. Déterminons le noyau de M . Soit $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$. L'équation $MX = 0$ donne

$$\begin{cases} -x_2 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 - x_5 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$x_2 = x_4 = 0, \quad x_1 = x_3 = x_5.$$

Ainsi

$$\text{Ker}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $\dim \text{Ker}(M) = 1$, et le théorème du rang donne

$$\text{rg}(M) = 5 - 1 = 4.$$

Finalement,

$$\boxed{\text{rg}(M) = 4.}$$

5.4. On a

$$(M^2)^T = (M^T)^2 = (-M)^2 = M^2.$$

La matrice M^2 est donc symétrique dans une base orthonormée. Par conséquent, f^2 est un endomorphisme symétrique de E .

5.5. Puisque M^2 est une matrice symétrique réelle, le théorème spectral assure qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée de \mathbb{R}^5 . Ainsi

$$\boxed{M^2 \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_5(\mathbb{R}).}$$

5.6. Soient $x, y \in E$, de matrices colonnes X et Y dans la base canonique. Alors

$$\langle f(x), y \rangle = (MX)^T Y = X^T M^T Y = X^T (-M) Y = -X^T M Y.$$

Or $X^T M Y = \langle x, f(y) \rangle$. Donc

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.}$$

6. Étude des éléments propres de f

6.1. On sait déjà que 0 est valeur propre de f , puisque f n'est pas injectif.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors

$$f(x) = \lambda x.$$

En utilisant la relation obtenue en 5.6 avec $y = x$, on trouve

$$\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle.$$

Or

$$\langle f(x), x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, f(x) \rangle = \lambda \langle x, x \rangle.$$

Ainsi

$$\lambda \|x\|^2 = -\lambda \|x\|^2,$$

donc

$$2\lambda \|x\|^2 = 0.$$

Comme $x \neq 0$, $\|x\|^2 > 0$, donc $\lambda = 0$.

Ainsi

$$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre réelle de } f.}$$

6.2. Si f était diagonalisable, alors, puisque sa seule valeur propre est 0, il existerait une base de E formée de vecteurs de $\text{Ker}(f)$. Cela imposerait

$$\dim \text{Ker}(f) = 5.$$

Or on a vu que $\dim \text{Ker}(f) = 1$. Contradiction.

Donc

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

6.3. Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 , et soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé :

$$f^2(x) = \lambda x.$$

Alors $f(x) \neq 0$, car sinon $f^2(x) = 0$, ce qui donnerait $\lambda x = 0$, impossible puisque $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$.

Calculons :

$$\lambda \|x\|^2 = \langle \lambda x, x \rangle = \langle f^2(x), x \rangle = \langle f(f(x)), x \rangle.$$

En appliquant 5.6 à $f(x)$ et x , on obtient

$$\langle f(f(x)), x \rangle = -\langle f(x), f(x) \rangle = -\|f(x)\|^2.$$

Donc

$$\lambda \|x\|^2 = -\|f(x)\|^2 < 0.$$

Comme $\|x\|^2 > 0$, il vient

$$\boxed{\lambda < 0.}$$

Dans la suite, on admet que les valeurs propres de f^2 sont 0, -1 et -3 .

7. Décomposition de E

Montrons que

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f).$$

D'abord, par le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = 5.$$

Il reste donc à prouver que l'intersection est réduite au vecteur nul. Soit $z \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Comme $z \in \text{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $z = f(y)$. Comme $z \in \text{Ker}(f)$, on a $f(z) = 0$.

Alors

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = \langle f(y), z \rangle.$$

En utilisant 5.6,

$$\langle f(y), z \rangle = -\langle y, f(z) \rangle = 0.$$

Donc $\|z\|^2 = 0$, d'où $z = 0$. Ainsi

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}.$$

Finalement,

$$\boxed{E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f).}$$

8. Plans stables associés aux valeurs propres non nulles de f^2

Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 et soit x un vecteur propre associé.

8.1. Supposons que x et $f(x)$ soient liés. Comme $x \neq 0$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = ax.$$

Alors

$$f^2(x) = a^2x.$$

Or $f^2(x) = \lambda x$, donc $\lambda = a^2 \geq 0$, ce qui contredit le fait que les valeurs propres non nulles de f^2 sont strictement négatives.

Ainsi

$$\boxed{(x, f(x)) \text{ est une famille libre.}}$$

8.2. Comme $f(x) \in \text{Im}(f)$ par définition, il reste à montrer que $x \in \text{Im}(f)$.

Or

$$f^2(x) = \lambda x,$$

avec $\lambda \neq 0$. Donc

$$x = \frac{1}{\lambda} f(f(x)) \in \text{Im}(f).$$

Ainsi x et $f(x)$ appartiennent à $\text{Im}(f)$ et forment une famille libre. Par conséquent

$$\boxed{\text{Vect}(x, f(x)) \text{ est un plan vectoriel inclus dans } \text{Im}(f).}$$

9. Base de $\text{Im}(f)$

Soient u un vecteur propre de f^2 associé à la valeur propre -1 , et v un vecteur propre de f^2 associé à la valeur propre -3 .

D'après la question préliminaire 2, puisque -1 et -3 sont non nulles, les vecteurs $f(u)$ et $f(v)$ sont encore des vecteurs propres de f^2 , respectivement associés à -1 et -3 .

Ainsi

$$u, f(u) \in E_{-1}(f^2), \quad v, f(v) \in E_{-3}(f^2).$$

Les valeurs propres -1 et -3 étant distinctes, la question préliminaire 3 donne

$$E_{-1}(f^2) \oplus E_{-3}(f^2) \text{ directe.}$$

D'après la question 8.1, les familles $(u, f(u))$ et $(v, f(v))$ sont libres. Leur somme est directe, donc la famille

$$(u, f(u), v, f(v))$$

est libre.

De plus, d'après la question 8.2, ces quatre vecteurs appartiennent à $\text{Im}(f)$. Or

$$\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(M) = 4.$$

Donc cette famille libre de quatre vecteurs de $\text{Im}(f)$ est une base de $\text{Im}(f)$:

$$\boxed{(u, f(u), v, f(v)) \text{ est une base de } \text{Im}(f).}$$

10. Réduction par blocs de M

Soit e_0 un vecteur non nul de $\text{Ker}(f)$. D'après les questions 7 et 9,

$$\mathcal{C} = (e_0, u, f(u), v, f(v))$$

est une base de E .

Dans cette base, on a

$$\begin{aligned} f(e_0) &= 0, \\ f(u) &= f(u), \quad f(f(u)) = f^2(u) = -u, \end{aligned}$$

et

$$f(v) = f(v), \quad f(f(v)) = f^2(v) = -3v.$$

La matrice de f dans la base \mathcal{C} est donc

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut donc choisir

$$\boxed{\alpha = -1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -3, \quad \delta = 1.}$$

Ainsi M est semblable à la matrice T correspondante. Plus généralement, ce qui importe pour les deux blocs est que $\alpha\beta = -1$ et $\gamma\delta = -3$, avec des coefficients non nuls.

Exercice 2

Questions préliminaires

1. Le développement limité de l'exponentielle à l'ordre 2 en 0 est

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2) \quad (h \rightarrow 0).$$

2. Soient h continue sur \mathbb{R}_+^* et $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction

$$H : x \mapsto \int_a^x h(t) dt$$

est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* d'après le théorème fondamental de l'analyse, et

$$H'(x) = h(x).$$

3. On écrit

$$G(x) = \int_x^{x+1} h(t) dt = \int_a^{x+1} h(t) dt - \int_a^x h(t) dt.$$

D'après la question précédente, G est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et

$$G'(x) = h(x+1) - h(x).$$

4. Définition de l'application T

Soit f continue sur $[0, 1]$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$x + t \geq x > 0.$$

Donc la fonction

$$t \mapsto \frac{f(t)}{x+t}$$

est continue sur $[0, 1]$. L'intégrale

$$F(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{x+t} dt$$

est donc bien définie pour tout $x > 0$.

5. Un premier exemple

On pose, pour tout entier naturel n ,

$$f_n : t \in [0, 1] \mapsto t^n, \quad F_n = T(f_n).$$

Ainsi

$$F_n(x) = \int_0^1 \frac{t^n}{x+t} dt.$$

5.1. Pour $n = 0$,

$$F_0(x) = \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = [\ln(x+t)]_0^1 = \ln(x+1) - \ln(x).$$

Donc

$$F_0(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

5.2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} F_k(x) + xF_{k-1}(x) &= \int_0^1 \frac{t^k}{x+t} dt + x \int_0^1 \frac{t^{k-1}}{x+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^k + xt^{k-1}}{x+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{k-1}(t+x)}{x+t} dt \\ &= \int_0^1 t^{k-1} dt = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{F_k(x) + xF_{k-1}(x) = \frac{1}{k}.}$$

5.3. À partir de la relation précédente,

$$F_k(x) + xF_{k-1}(x) = \frac{1}{k}.$$

En divisant par $(-x)^k$, on obtient

$$\frac{F_k(x)}{(-x)^k} + \frac{xF_{k-1}(x)}{(-x)^k} = \frac{1}{k(-x)^k}.$$

Or

$$\frac{x}{(-x)^k} = -\frac{1}{(-x)^{k-1}},$$

donc

$$\boxed{\frac{F_k(x)}{(-x)^k} - \frac{F_{k-1}(x)}{(-x)^{k-1}} = \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^k.}$$

5.4. En sommant l'identité précédente pour $k = 1, \dots, n$, on obtient un télescopage :

$$\frac{F_n(x)}{(-x)^n} - F_0(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^k.$$

Comme

$$F_0(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

il vient

$$\frac{F_n(x)}{(-x)^n} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^k.$$

Posons

$$P_n(X) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} X^k = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n.$$

Pour $n = 0$, on pose $P_0 = 0$. Alors

$$\boxed{F_n(x) = (-x)^n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - P_n\left(\frac{1}{x}\right) \right).}$$

6. Un deuxième exemple

On pose

$$g : t \in [0, 1] \mapsto e^t, \quad G = T(g),$$

c'est-à-dire

$$G(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt.$$

6.1. On effectue le changement de variable $u = x + t$. Alors $t = u - x$, $du = dt$, et

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u} du \\ &= e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du. \end{aligned}$$

La fonction $u \mapsto e^u/u$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . D'après la question préliminaire 3,

$$x \mapsto \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du$$

est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* . Comme $x \mapsto e^{-x}$ est aussi de classe C^1 , on en déduit que

$$\boxed{G \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}).}$$

On utilisera également la dérivée

$$G'(x) = -G(x) + \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

6.2. On pose, lorsque cela existe,

$$J(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt, \quad K(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt.$$

6.2.1. La fonction $t \mapsto (e^t - 1)/t$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus, grâce au développement limité

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

on a

$$\frac{e^t - 1}{t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t),$$

donc cette fonction se prolonge continûment en 0 en lui donnant la valeur 1.

La fonction $t \mapsto e^t/(1+t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Par le théorème fondamental de l'analyse, J et K sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* , avec

$$\boxed{J'(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad K'(x) = \frac{e^x}{1+x}.}$$

6.2.2. On considère

$$L(x) = e^x G(x) - eK(x) + J(x) + \ln(x).$$

En utilisant l'expression obtenue après changement de variable,

$$e^x G(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du.$$

Donc

$$\frac{d}{dx}(e^x G(x)) = \frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x}.$$

De plus,

$$\frac{d}{dx}(-eK(x)) = -e \frac{e^x}{1+x} = -\frac{e^{x+1}}{x+1},$$

et

$$J'(x) + \frac{1}{x} = \frac{e^x - 1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}.$$

En sommant,

$$L'(x) = \left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x} \right) - \frac{e^{x+1}}{x+1} + \frac{e^x}{x} = 0.$$

Ainsi

$$\boxed{L \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+^*}.$$

6.2.3. Puisque L est constante, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$,

$$e^x G(x) - eK(x) + J(x) + \ln(x) = C.$$

Ainsi

$$e^x G(x) = C + eK(x) - J(x) - \ln(x).$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a

$$K(x) \rightarrow 0, \quad J(x) \rightarrow 0, \quad e^x \rightarrow 1.$$

Donc

$$G(x) = e^{-x}(-\ln(x) + C + o(1)).$$

Comme $-\ln(x) \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = +\infty}$$

et

$$\boxed{G(x) \sim -\ln(x) \quad (x \rightarrow 0^+)}.$$

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$. On note

$$p_k = \mathbb{P}(X = k), \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

On a

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

1. Puisque X prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, la variable X^2 prend ses valeurs dans

$$\boxed{\{1, 4, 9\}}.$$

2. On a

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 p_1 + 2^2 p_2 + 3^2 p_3 = p_1 + 4p_2 + 9p_3.$$

Comme $p_3 = 1 - p_1 - p_2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= p_1 + 4p_2 + 9(1 - p_1 - p_2) \\ &= 9 - 8p_1 - 5p_2. \end{aligned}$$

3. De même,

$$\mathbb{E}(X) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = p_1 + 2p_2 + 3(1 - p_1 - p_2) = 3 - 2p_1 - p_2.$$

Donc

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= 9 - 8p_1 - 5p_2 - (3 - 2p_1 - p_2)^2. \end{aligned}$$

En développant,

$$V(X) = 4p_1 + p_2 - 4p_1^2 - p_2^2 - 4p_1p_2.$$

4. On considère la fonction

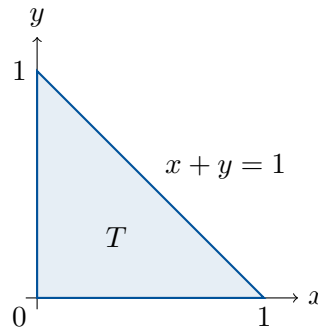
$$f(x, y) = 4x + y - 4x^2 - y^2 - 4xy,$$

définie sur \mathbb{R}^2 , et l'ensemble

$$T = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \leq 1\}.$$

4.1. L'ensemble T est le triangle fermé de sommets

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (0, 1).$$



4.2. La fonction f est polynomiale en les variables x et y . Elle est donc de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

4.3. L'ensemble T est fermé et borné dans \mathbb{R}^2 , donc compact. La fonction f est continue sur T . Par le théorème des bornes atteintes, f admet un maximum et un minimum sur T .

4.4. Pour $m = (x, y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4 - 8x - 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 - 2y - 4x.$$

Donc

$$\nabla f(x, y) = (4 - 8x - 4y, 1 - 2y - 4x).$$

4.5. Un point critique intérieur devrait vérifier

$$\begin{cases} 4 - 8x - 4y = 0, \\ 1 - 2y - 4x = 0. \end{cases}$$

La première équation donne

$$2x + y = 1,$$

tandis que la seconde donne

$$2x + y = \frac{1}{2}.$$

Ces conditions sont incompatibles. Ainsi f ne possède aucun point critique dans l'intérieur de T .

4.6. On pose

$$g(x) = x(1 - x), \quad x \in [0, 1].$$

Alors

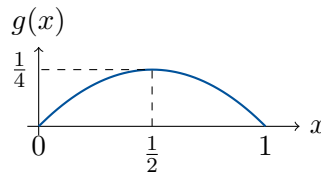
$$g'(x) = 1 - 2x.$$

Donc g est croissante sur $[0, 1/2]$ et décroissante sur $[1/2, 1]$. De plus,

$$g(0) = 0, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad g(1) = 0.$$

Le tableau de variations est donc

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$\frac{1}{4}$	0



4.7. Comme f n'a pas de point critique intérieur, ses extrema sur T sont atteints sur le bord de T .

Premier côté : $y = 0$, avec $x \in [0, 1]$.

$$f(x, 0) = 4x - 4x^2 = 4x(1 - x) = 4g(x).$$

Donc

$$\min_{[0,1]} f(x, 0) = 0, \quad \max_{[0,1]} f(x, 0) = 1,$$

le maximum étant atteint pour $x = 1/2$.

Deuxième côté : $x = 0$, avec $y \in [0, 1]$.

$$f(0, y) = y - y^2 = g(y).$$

Donc

$$\min_{[0,1]} f(0, y) = 0, \quad \max_{[0,1]} f(0, y) = \frac{1}{4}.$$

Troisième côté : $x + y = 1$. On pose $y = 1 - x$, avec $x \in [0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} f(x, 1 - x) &= 4x + (1 - x) - 4x^2 - (1 - x)^2 - 4x(1 - x) \\ &= x(1 - x) = g(x). \end{aligned}$$

Donc, sur ce côté,

$$\min = 0, \quad \max = \frac{1}{4}.$$

Finalement, sur T ,

$$\boxed{\min_T f = 0}$$

et ce minimum est atteint aux trois sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$; tandis que

$$\boxed{\max_T f = 1}$$

et ce maximum est atteint en

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}.$$

5. Dans le problème probabiliste initial, on a

$$x = p_1, \quad y = p_2, \quad p_3 = 1 - p_1 - p_2.$$

Le domaine possible des couples (p_1, p_2) est exactement T .

D'après l'étude précédente :

$$V(X) \leq 1,$$

avec égalité lorsque

$$(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad p_3 = \frac{1}{2}.$$

Donc la variance est maximale pour

$$\boxed{(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)},$$

et vaut alors

$$\boxed{V_{\max} = 1.}$$

La variance est minimale et vaut 0 aux points

$$(p_1, p_2) = (1, 0), \quad (0, 1), \quad (0, 0),$$

c'est-à-dire pour

$$\boxed{(p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).}$$

6. Lorsque la variance est minimale, elle est nulle. Cela signifie que la variable aléatoire X est presque sûrement constante.

Ici, cela correspond aux trois cas suivants :

$$X = 1 \text{ p.s.}, \quad X = 2 \text{ p.s.}, \quad X = 3 \text{ p.s.}$$