Correction détaillée

ENS – Concours 2026 – Filière PSI

Épreuve spécifique – Mathématiques

Exercice 1

On fixe un entier $n \geq 2$.

Questions préliminaires.

1. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|h\| \to 0$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 s'écrit

$$g(a+h) = g(a) + \mathrm{d}g(a)(h) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 g(a)(h,h) + o(\|h\|^2).$$

En coordonnées, si $H_g(a)$ désigne la matrice hessienne de g en a, alors

$$g(a+h) = g(a) + \nabla g(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_g(a) h + o(\|h\|^2).$$

2. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

2.1. Toutes les colonnes de J sont égales à la colonne $(1,\dots,1)^T$, et cette colonne est non nulle. Donc

$$\boxed{\mathrm{rg}(J) = 1.}$$

2.2. Pour tout $x = (x_1,\dots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$$Jx = (x_1 + \dots + x_n)\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\ker(J) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\},$$

qui est un hyperplan de dimension $n-1$. Donc 0 est valeur propre de J et son sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.

De plus, si $u = (1,\dots,1)^T$, alors $Ju = nu$. Dans une base formée de u et d'une base de $\ker(J)$, la matrice de J est diagonale, de diagonale $(n,0,\dots,0)$. Ainsi 0 est valeur propre de multiplicité algébrique

$$\boxed{n-1.}$$

2.3. La matrice J est symétrique réelle, donc $I_n + J$ est symétrique réelle. Ses valeurs propres sont obtenues en ajoutant 1 aux valeurs propres de J :

$$n+1 \quad \text{et} \quad 1 \text{ avec multiplicité } n-1.$$

Elles sont toutes strictement positives. Donc

$$\boxed{I_n + J \text{ est symétrique réelle définie positive.}}$$

On peut aussi le voir directement : pour $x \neq 0$,

$$x^T(I_n + J)x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0.$$

On considère maintenant la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

On note

$$S = x_1 + \cdots + x_n.$$

3. La fonction f est polynomiale en les variables $x_1, \ldots, x_n$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, en particulier de classe $\mathcal{C}^2$, sur $\mathbb{R}^n$.

4. Soit $m = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

4.1. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(m) = 2x_i + 2S - 1.$$

4.2. Si $i \neq j$, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(m) = 2.$$

En particulier,

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(m) = 2.}$$

4.3. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(m) = 4.$$

5. Le gradient de f au point m vaut donc

$$\boxed{\nabla f(m) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2S - 1 \\ \vdots \\ 2x_n + 2S - 1 \end{pmatrix}.}$$

6. Un point critique $a = (a_1, \ldots, a_n)$ vérifie, en notant $A = a_1 + \cdots + a_n$,

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad 2a_i + 2A - 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$a_i + A = \frac{1}{2}.$$

Ainsi tous les a_i sont égaux. Notons leur valeur commune c. Alors $A = nc$, et

$$c + nc = \frac{1}{2},$$

donc

$$c = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Ainsi f possède un unique point critique :

$$\boxed{a = \left(\frac{1}{2(n+1)}, \dots, \frac{1}{2(n+1)}\right).}$$

7. Soit $m \in \mathbb{R}^n$.

7.1. D'après les dérivées secondes calculées plus haut, la matrice hessienne de f est constante et vaut

$$H_f(m) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 4 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 4 \end{pmatrix} = 2I_n + 2J.$$

7.2. Comme J a pour valeurs propres n et 0 avec multiplicité $n-1$, la matrice $H_f(m) = 2I_n + 2J$ a pour valeurs propres

$$2 + 2n = 2(n+1) \quad \text{et} \quad 2,$$

la valeur propre 2 étant de multiplicité $n-1$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(H_f(m)) = \{2, 2(n+1)\}.}$$

Plus précisément, $2(n+1)$ est simple et 2 est de multiplicité $n-1$.

8. La hessienne est symétrique définie positive puisque

$$H_f(m) = 2(I_n + J)$$

et $I_n + J$ est symétrique définie positive. Le point critique a est donc un minimum local strict.

Comme f est une fonction quadratique et que sa hessienne est définie positive partout, ce minimum est même global strict.

Calculons sa valeur. On a, pour $a_i = \dfrac{1}{2(n+1)}$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \frac{n}{4(n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2(n+1)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{n}{4(n+1)^2} + \frac{n^2}{4(n+1)^2} - \frac{n}{2(n+1)} \\ &= \frac{n(n+1)}{4(n+1)^2} - \frac{2n(n+1)}{4(n+1)^2} \\ &= -\frac{n}{4(n+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{f \text{ admet en } a \text{ un minimum local strict, de valeur } -\frac{n}{4(n+1)}.}$$

Exercice 2

On considère la fonction
$$f : x \longmapsto \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right).$$
La suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie, lorsque cela est possible, par
$$v_0 \in [-1, 1], \qquad v_{n+1} = f(v_n).$$

1. Étude de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.1. Sur $[-1, 1]$, on a $1 - x/2 > 0$, donc f est bien définie et dérivable. De plus
$$f'(x) = \frac{-1/2}{1 - x/2} = -\frac{1}{2 - x} < 0.$$
La fonction f est donc strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

On calcule
$$f(-1) = \ln\left(\frac{3}{2}\right), \qquad f(1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2.$$
Ainsi
$$f([-1, 1]) = \left[-\ln 2, \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right].$$
Donc
$$\boxed{a = -\ln 2, \qquad b = \ln\left(\frac{3}{2}\right).}$$

1.2. On vérifie que
$$-1 < -\ln 2 < 0 \qquad \text{et} \qquad 0 < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < 1.$$
En effet $\ln 2 < 1$ et $\ln(3/2) < 1$. Donc
$$\boxed{[a, b] \subset]-1, 1[.}$$

1.3. Comme $v_0 \in [-1, 1]$, on a
$$v_1 = f(v_0) \in f([-1, 1]) = [a, b].$$
Or $[a, b] \subset [-1, 1]$, donc $v_2 = f(v_1)$ est bien défini et appartient encore à $[a, b]$ car $f([-1, 1]) = [a, b]$.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est bien défini et
$$\boxed{v_n \in [a, b].}$$

1.4. Pour $x \in [a, b]$,
$$|f'(x)| = \frac{1}{2 - x}.$$
Comme $x \leq b < 1$, on a $2 - x \geq 2 - b > 1$. Ainsi
$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2 - b} < 1.$$
Il suffit donc de choisir
$$\boxed{k = \frac{1}{2 - b} = \frac{1}{2 - \ln(3/2)} \in]0, 1[.}$$

1.5. Pour $n \geq 2$, on a $v_{n-1} \in [a, b]$ et $0 \in [a, b]$. Comme $f(0) = 0$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$|v_n| = |f(v_{n-1}) - f(0)| \leq k|v_{n-1} - 0|.$$

Donc

$$\boxed{\forall n \geq 2, \qquad |v_n| \leq k|v_{n-1}|.}$$

1.6. En itérant l'inégalité précédente, pour tout $n \geq 1$,

$$|v_{n+1}| \leq k^n |v_1|.$$

Comme $0 < k < 1$, on a $k^n \to 0$. Donc $v_n \to 0$. Ainsi

$$\boxed{(v_n) \text{ converge vers } 0.}$$

2. Étude d'une série de fonctions.

On définit, pour $x \in [-1, 1]$,

$$u_0(x) = x, \qquad u_{n+1}(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}u_n(x)\right) = f(u_n(x)).$$

Pour tout $x \in [-1, 1]$, la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est exactement la suite précédente avec $v_0 = x$. Les résultats obtenus donnent donc, pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \geq 1$,

$$u_n(x) \in [a, b].$$

De plus, pour tout $n \geq 2$,

$$|u_n(x)| \leq k|u_{n-1}(x)|.$$

En particulier, par récurrence, pour tout $n \geq 1$,

$$|u_n(x)| \leq k^{n-1}|u_1(x)|.$$

Or $u_1(x) \in [a, b]$, donc

$$|u_1(x)| \leq M, \qquad M = \max(|a|, |b|) = \ln 2.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \geq 1$,

$$|u_n(x)| \leq Mk^{n-1}.$$

La série numérique $\sum_{n \geq 1} Mk^{n-1}$ converge puisque $0 < k < 1$. Par le critère de Weierstrass, la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge uniformément sur $[-1, 1]$.

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge uniformément sur } [-1, 1].}$$

Exercice 3

Soit $n \geq 3$ et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on pose

$$P_k(X) = X^k.$$

On considère l'application Φ définie par

$$\Phi(P) = \left((X^2-1)P\right)'' = (X^2-1)P'' + 4XP' + 2P.$$

1. L'application $P \mapsto (X^2-1)P$ est linéaire, et la dérivation seconde est linéaire. Donc Φ est linéaire.

Si $P \in E_n$ et $\deg P = d \leq n$, alors $(X^2-1)P$ est de degré au plus $d+2$, donc sa dérivée seconde est de degré au plus $d \leq n$. Ainsi $\Phi(P) \in E_n$.

Donc

$$\boxed{\Phi \in \mathcal{L}(E_n).}$$

2. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$P_k' = kX^{k-1}, \qquad P_k'' = k(k-1)X^{k-2},$$

avec la convention naturelle que le terme est nul lorsque $k = 0$ ou $k = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\Phi(P_k) &= (X^2-1)k(k-1)X^{k-2} + 4X\,kX^{k-1} + 2X^k \\
&= \left(k(k-1) + 4k + 2\right)X^k - k(k-1)X^{k-2} \\
&= (k+1)(k+2)X^k - k(k-1)X^{k-2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\Phi(P_k) = (k+1)(k+2)P_k - k(k-1)P_{k-2},}$$

le second terme étant nul pour $k = 0, 1$.

3. Dans la base $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$, la matrice M de Φ est triangulaire supérieure. Ses premières colonnes sont

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, si $j \in \{3, \ldots, n+1\}$, alors la j-ième colonne correspond à P_{j-1} et vaut

$$\boxed{C_j = -(j-1)(j-2)e_{j-2} + j(j+1)e_j,}$$

où $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Autrement dit, avec l'indexation matricielle usuelle à partir de 1, les seules entrées non nulles sont

$$\boxed{m_{j,j} = j(j+1) \quad (1 \leq j \leq n+1), \qquad m_{j,j+2} = -j(j+1) \quad (1 \leq j \leq n-1).}$$

Toutes les autres entrées sont nulles.

4. Comme M est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux :

$$\lambda_k = (k+1)(k+2), \qquad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

La suite (λ_k) est strictement croissante car

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+2)(k+3) - (k+1)(k+2) = 2(k+2) > 0.$$

Donc Φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes :

$$\boxed{\lambda_0 = 2 < \lambda_1 = 6 < \cdots < \lambda_n = (n+1)(n+2).}$$

5. Le déterminant de Φ est le produit des valeurs propres, c'est-à-dire

$$\det(\Phi) = \prod_{k=0}^{n} (k+1)(k+2),$$

qui est non nul. Donc

$$\boxed{\Phi \text{ est un automorphisme de } E_n.}$$

6. Puisque E_n est de dimension $n+1$ et que Φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes, Φ est diagonalisable.

Chaque sous-espace propre est de dimension 1 : en effet, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $n+1$, et chacun est de dimension au moins 1. Ainsi

$$\boxed{\dim E_{\lambda_k}(\Phi) = 1 \quad \text{pour tout } k \in \{0, \dots, n\}.}$$

7. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$ et soit T un vecteur propre associé à λ_k.

7.1. Notons $d = \deg T$ et c le coefficient dominant de T. Alors le coefficient dominant de $\Phi(T)$ est

$$c(d+1)(d+2).$$

Comme $\Phi(T) = \lambda_k T$, on obtient

$$c(d+1)(d+2) = c\lambda_k.$$

Comme $c \neq 0$,

$$(d+1)(d+2) = (k+1)(k+2).$$

La fonction $r \mapsto (r+1)(r+2)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, donc $d = k$. Ainsi

$$\boxed{\deg T = k.}$$

7.2. Posons $Q(X) = T(-X)$. L'application de parité $P(X) \mapsto P(-X)$ commute avec Φ, car $X^2 - 1$ est pair et la dérivation seconde compense les signes de dérivation. Plus explicitement,

$$\Phi(Q)(X) = \Phi(T)(-X).$$

Donc

$$\Phi(Q)(X) = \lambda_k T(-X) = \lambda_k Q(X).$$

Ainsi

$$\boxed{Q \text{ est aussi un vecteur propre associé à } \lambda_k.}$$

8. Pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$, le sous-espace propre associé à λ_k est une droite, et tout vecteur propre non nul associé à λ_k est de degré k. Il existe donc un unique vecteur propre monique de degré k ; on le note Q_k.

Comme les λ_k sont distinctes, la famille $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de E_n constituée de vecteurs propres de Φ.

Montrons la propriété de parité. Le polynôme $Q_k(-X)$ est propre pour la même valeur propre λ_k et son coefficient dominant vaut $(-1)^k$. Donc $(-1)^k Q_k(-X)$ est monique, de degré k, et propre pour λ_k. Par unicité,

$$(-1)^k Q_k(-X) = Q_k(X),$$

ce qui équivaut à

$$\boxed{Q_k(-X) = (-1)^k Q_k(X).}$$

9. On déduit immédiatement que Q_k est pair lorsque k est pair et impair lorsque k est impair.

$$\boxed{Q_k \text{ a la même parité que } k.}$$

10. Pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$, le polynôme Q_j est monique de degré j. La matrice de la famille $(Q_0, \dots, Q_k)$ dans la base $(1, X, \dots, X^k)$ est donc triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Elle est donc inversible.

Ainsi

$$\boxed{(Q_0, \dots, Q_k) \text{ est une base de } \mathbb{R}_k[X].}$$

11. Calculons Q_0, Q_1, Q_2, Q_3.

On a directement

$$\boxed{Q_0 = 1, \qquad Q_1 = X.}$$

Le polynôme Q_2 est pair, monique, de degré 2, donc $Q_2 = X^2 + c$. Or $\lambda_2 = 12$. Ainsi

$$\Phi(X^2 + c) = 12X^2 - 2 + 2c$$

et on impose

$$12X^2 - 2 + 2c = 12(X^2 + c).$$

Donc $2c - 2 = 12c$, d'où $c = -\frac{1}{5}$. Ainsi

$$\boxed{Q_2 = X^2 - \frac{1}{5}.}$$

Le polynôme Q_3 est impair, monique, de degré 3, donc $Q_3 = X^3 + aX$. Or $\lambda_3 = 20$. Ainsi

$$\Phi(X^3 + aX) = 20X^3 - 6X + 6aX,$$

et on impose

$$20X^3 + (6a - 6)X = 20(X^3 + aX).$$

Donc $6a - 6 = 20a$, d'où $a = -\frac{3}{7}$. Ainsi

$$\boxed{Q_3 = X^3 - \frac{3}{7}X.}$$

12. On définit

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} (1 - t^2) P(t) Q(t) \, dt.$$

Cette application est bilinéaire et symétrique par linéarité de l'intégrale et symétrie du produit.

De plus,

$$(P \mid P) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)P(t)^2 \, dt \geq 0.$$

Si $(P \mid P) = 0$, alors la fonction continue $(1-t^2)P(t)^2$ est positive et d'intégrale nulle sur $[-1,1]$. Elle est donc identiquement nulle. Sur $]-1,1[$, on a $1-t^2 > 0$, donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in]-1,1[$. Un polynôme nul sur un intervalle infini est nul.

Donc

$$\boxed{(\cdot \mid \cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E_n.}$$

13. On munit désormais E_n de ce produit scalaire.

13.1. Soient $P, Q \in E_n$. Posons

$$A(t) = (t^2-1)P(t), \qquad B(t) = (t^2-1)Q(t).$$

Alors $A(-1) = A(1) = B(-1) = B(1) = 0$ et

$$\Phi(P)(t) = A''(t), \qquad \Phi(Q)(t) = B''(t).$$

On a

$$(\Phi(P) \mid Q) = -\int_{-1}^{1} A''(t)B(t)\, dt,$$

et

$$(P \mid \Phi(Q)) = -\int_{-1}^{1} A(t)B''(t)\, dt.$$

Or, par deux intégrations par parties,

$$\int_{-1}^{1} A''B = [A'B]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} A'B' = -\int_{-1}^{1} A'B',$$

car $B(\pm 1) = 0$, et

$$\int_{-1}^{1} AB'' = [AB']_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} A'B' = -\int_{-1}^{1} A'B',$$

car $A(\pm 1) = 0$. Donc

$$(\Phi(P) \mid Q) = (P \mid \Phi(Q)).$$

Ainsi

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } (E_n, (\cdot \mid \cdot)).}$$

13.2. Soient $i \neq j$. Alors

$$(\Phi(Q_i) \mid Q_j) = \lambda_i (Q_i \mid Q_j),$$

et, par symétrie de Φ,

$$(\Phi(Q_i) \mid Q_j) = (Q_i \mid \Phi(Q_j)) = \lambda_j (Q_i \mid Q_j).$$

Donc

$$(\lambda_i - \lambda_j)(Q_i \mid Q_j) = 0.$$

Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$, on obtient

$$(Q_i \mid Q_j) = 0.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathcal{U} = (Q_0, \ldots, Q_n) \text{ est une base orthogonale de } E_n.}$$

14. Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. D'après la question 10, la famille $(Q_0, \ldots, Q_{j-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$. Donc tout $S \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$ s'écrit

$$S = \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i Q_i.$$

Par orthogonalité de la base $\mathcal{U}$,

$$(S \mid Q_j) = \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i (Q_i \mid Q_j) = 0.$$

Donc

$$\boxed{\forall S \in \mathbb{R}_{j-1}[X], \qquad (S \mid Q_j) = 0.}$$

Exercice 4

Dans tout l'exercice, on confond un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

Questions préliminaires.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair. Notons d son degré et a_d son coefficient dominant. Lorsque $x \to +\infty$,

$$P(x) \sim a_d x^d,$$

tandis que lorsque $x \to -\infty$,

$$P(x) \sim a_d x^d.$$

Comme d est impair, les quantités $a_d x^d$ en $+\infty$ et en $-\infty$ ont des signes opposés. Donc P prend des valeurs de signes opposés pour x assez grand positif et x assez grand négatif. Par continuité et théorème des valeurs intermédiaires, P possède au moins une racine réelle.

$$\boxed{\text{Tout polynôme réel de degré impair possède une racine réelle.}}$$

2. Les racines complexes de $X^{11} - 1$ sont les racines onzièmes de l'unité :

$$\boxed{\zeta_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{11}\right), \qquad k = 0, 1, \dots, 10.}$$

3. Pour $X \neq 1$,

$$1 + X + X^2 + \cdots + X^{10} = \frac{X^{11} - 1}{X - 1}.$$

Les racines de $1 + X + \cdots + X^{10}$ sont donc les racines onzièmes de l'unité différentes de 1 :

$$\boxed{\exp\left(\frac{2ik\pi}{11}\right), \qquad k = 1, 2, \dots, 10.}$$

Aucune n'est réelle : les seules racines de l'unité réelles sont 1 et -1, mais 1 est exclue et -1 n'est pas racine onzième de l'unité.

On considère deux variables aléatoires U et V correspondant aux résultats de deux dés à six faces, numérotées de 1 à 6, pas forcément équilibrés. On suppose que les lancers sont indépendants et que chaque face possède une probabilité non nulle d'apparition. On pose

$$S = U + V.$$

4. Comme chaque face a une probabilité non nulle,

$$\boxed{U(\Omega) = V(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.}$$

Par indépendance et positivité des probabilités de chaque face, toutes les sommes de 2 à 12 ont une probabilité non nulle. Ainsi

$$\boxed{S(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}.}$$

On suppose désormais que S suit une loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$.

5. Pour une variable aléatoire entière finie X, on note

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X).$$

Comme S est uniforme sur les 11 valeurs $2, 3, \ldots, 12$, on a

$$G_S(t) = \frac{1}{11}\sum_{k=2}^{12} t^k = \frac{t^2}{11}\sum_{k=0}^{10} t^k.$$

Donc

$$\boxed{G_S(t) = \frac{t^2}{11}(1 + t + t^2 + \cdots + t^{10}).}$$

6. D'après la question précédente, les racines de G_S sont :

$$0 \quad \text{avec multiplicité } 2,$$

ainsi que les racines de $1 + t + \cdots + t^{10}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\exp\left(\frac{2ik\pi}{11}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, 10.}$$

En particulier, G_S ne possède aucune racine réelle non nulle.

7. Posons

$$p_i = \mathbb{P}(U = i) > 0, \qquad q_i = \mathbb{P}(V = i) > 0, \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

Alors

$$G_U(t) = p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_6 t^6 = tQ(t),$$

avec

$$\boxed{Q(t) = p_1 + p_2 t + \cdots + p_6 t^5.}$$

De même,

$$G_V(t) = q_1 t + q_2 t^2 + \cdots + q_6 t^6 = tR(t),$$

avec

$$\boxed{R(t) = q_1 + q_2 t + \cdots + q_6 t^5.}$$

8. Les polynômes Q et R sont de degré 5, car $p_6 > 0$ et $q_6 > 0$. Ils sont donc de degré impair. D'après la première question préliminaire, chacun possède au moins une racine réelle.

De plus,

$$Q(0) = p_1 > 0, \qquad R(0) = q_1 > 0,$$

donc ces racines réelles ne sont pas nulles.

9. Comme U et V sont indépendantes,

$$G_S(t) = G_{U+V}(t) = G_U(t)G_V(t).$$

En utilisant les écritures précédentes,

$$\boxed{G_S(t) = t^2 Q(t)R(t).}$$

10. D'après la question 8, Q ou R possède une racine réelle non nulle ; en réalité, chacun en possède au moins une. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ une racine réelle de Q ou de R. Alors, d'après

$$G_S(t) = t^2 Q(t) R(t),$$

on a $G_S(\alpha) = 0$.

Ainsi G_S possède une racine réelle non nulle. Or, d'après la question 6, les seules racines de G_S sont 0 et les racines complexes non réelles de $1 + t + \cdots + t^{10}$. Contradiction.

Donc la supposition encadrée est fausse :

$$\boxed{S \text{ ne peut pas suivre une loi uniforme sur } \{2, \ldots, 12\}.}$$

11. Il n'est donc pas possible de truquer deux dés à six faces, avec des probabilités strictement positives sur chaque face et des lancers indépendants, de telle sorte que la somme des deux résultats suive une loi uniforme.

$$\boxed{\text{Une telle construction est impossible.}}$$