Correction – Mathématiques I MP 2026

Équation d'Euler–Lagrange et applications

Table des matières

I – Lemme fondamental du calcul variationnel

On fixe $a < b$ et une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall h \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R}), \quad h(a) = h(b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Question 1

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\varphi(x) = e^{-1/x}.$$

La fonction $x \mapsto -1/x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc φ l'est aussi sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrons ensuite par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x > 0, \qquad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}.$$

Pour $n = 0$, il suffit de prendre $P_0 = 1$. Supposons la propriété vraie au rang n. Alors, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}\right)\\ &= \left(-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-1/x}.\end{aligned}$$

En posant

$$P_{n+1}(X) = X^2(P_n(X) - P_n'(X)),$$

on obtient bien un polynôme qui convient au rang $n + 1$. La récurrence est établie.

Question 2

On sait déjà que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par définition, φ est nulle sur $]-\infty, 0]$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$.

Il reste à vérifier le raccord en 0. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,

$$\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}.$$

Or, pour tout entier $k \geq 0$,

$$x^{-k} e^{-1/x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0,$$

car en posant $t = 1/x$, on a $t^k e^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varphi^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0.$$

À gauche de 0, toutes les dérivées valent 0. Par récurrence sur l'ordre de dérivation, les dérivées se raccordent donc toutes continûment en 0. Ainsi,

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$$

Question 3

Soient $c < d$. On pose

$$\psi_{c,d}(x) = \varphi(x - c)\varphi(d - x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\psi_{c,d}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Si $x \in]c, d[$, alors $x - c > 0$ et $d - x > 0$, donc

$$\psi_{c,d}(x) = e^{-1/(x-c)} e^{-1/(d-x)} > 0.$$

Si $x \notin]c, d[$, alors $x - c \leq 0$ ou $d - x \leq 0$, donc au moins un des deux facteurs est nul. Par conséquent,

$$\boxed{\psi_{c,d} > 0 \text{ sur }]c, d[, \qquad \psi_{c,d} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \backslash]c, d[.}$$

Question 4

Supposons par l'absurde que f ne soit pas identiquement nulle sur $[a, b]$. Il existe alors $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

Si $f(x_0) > 0$, par continuité de f, il existe un intervalle ouvert $]c, d[$ contenu dans $[a, b]$ tel que $f(x) > 0$ sur $]c, d[$. On choisit alors

$$h = \psi_{c,d}.$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulle en a et en b, et l'on obtient

$$\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(x)\psi_{c,d}(x)\,\mathrm{d}x > 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Si $f(x_0) < 0$, le même raisonnement donne une intégrale strictement négative, ce qui est encore impossible. Ainsi,

$$\boxed{f \equiv 0 \text{ sur } [a, b].}$$

II – Équation d'Euler–Lagrange

On considère

$$T(y) = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$$

sur l'ensemble admissible $\mathcal{C}$ décrit dans l'énoncé.

Question 5

Soit $y \in \mathcal{C}$. Les fonctions y et y' sont continues sur le segment $[x_A, x_B]$. Par définition de $\mathcal{C}$, on a

$$\forall x \in [x_A, x_B], \qquad y(x) \in U, \qquad y'(x) \in V.$$

L'application

$$x \longmapsto (x, y(x), y'(x))$$

est donc continue sur $[x_A, x_B]$, et son image est contenue dans $[x_A, x_B] \times U \times V$. Comme f est continue, la composée

$$x \longmapsto f(x, y(x), y'(x))$$

est continue sur $[x_A, x_B]$. Elle est donc intégrable sur ce segment, ce qui justifie l'existence de $T(y)$.

Question 6

Soit $\eta \in \mathcal{C}^2([x_A, x_B], \mathbb{R})$ telle que $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$. On pose

$$y_\varepsilon = z_0 + \varepsilon\eta.$$

Alors y_ε est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie bien les conditions aux bornes :

$$y_\varepsilon(x_A) = z_0(x_A) = y_0, \qquad y_\varepsilon(x_B) = z_0(x_B) = y_1.$$

Il reste à s'assurer que $y_\varepsilon(x) \in U$ et $y_\varepsilon'(x) \in V$ pour $|\varepsilon|$ assez petit.
Les compacts

$$K_1 = z_0([x_A, x_B]) \subset U, \qquad K_2 = z_0'([x_A, x_B]) \subset V$$

sont inclus dans des ouverts de $\mathbb{R}$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$K_1 + [-\delta, \delta] \subset U, \qquad K_2 + [-\delta, \delta] \subset V.$$

Posons

$$M = \max(\|\eta\|_\infty, \|\eta'\|_\infty).$$

Si $M = 0$, n'importe quel $\alpha > 0$ convient. Sinon, on choisit

$$\alpha = \frac{\delta}{M}.$$

Alors, pour $|\varepsilon| \leq \alpha$,

$$|\varepsilon\eta(x)| \leq \delta, \qquad |\varepsilon\eta'(x)| \leq \delta.$$

Donc $y_\varepsilon(x) \in U$ et $y_\varepsilon'(x) \in V$ pour tout $x \in [x_A, x_B]$. Ainsi,

$$\boxed{\exists \alpha > 0, \quad \forall \varepsilon \in [-\alpha, \alpha], \quad y_\varepsilon \in \mathcal{C}.}$$

Question 7

On définit

$$\Phi(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y_\varepsilon(x), y_\varepsilon'(x))\, \mathrm{d}x.$$

Pour $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$, l'application

$$(x, \varepsilon) \longmapsto f(x, z_0(x) + \varepsilon\eta(x), z_0'(x) + \varepsilon\eta'(x))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ en ε, et sa dérivée partielle par rapport à ε vaut

$$\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y_\varepsilon'(x)) + \eta'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y_\varepsilon'(x)).$$

Sur tout compact inclus dans $]-\alpha, \alpha[$, cette dérivée est continue et bornée en x ; on peut donc dériver sous le signe intégral. On obtient

$$\boxed{\Phi'(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} \left(\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y_\varepsilon'(x)) + \eta'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y_\varepsilon'(x))\right) \mathrm{d}x.}$$

En particulier, Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\alpha, \alpha[$.

Question 8

Comme T admet un extremum local en z_0, la fonction Φ admet un extremum local en 0. Par conséquent,

$$\Phi'(0) = 0.$$

D'après la formule précédente,

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left(\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z_0'(x)) + \eta'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x))\right) \mathrm{d}x.$$

Posons

$$g(x) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x)).$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_A, x_B[$. En intégrant par parties et en utilisant $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$, on obtient

$$\int_{x_A}^{x_B} \eta'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [\eta(x)g(x)]_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \eta(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{x_A}^{x_B} \eta(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x))\right)\right)\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0.}$$

Question 9

On pose, pour $x \in]x_A, x_B[$,

$$G(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x))\right).$$

La fonction G est continue sur $]x_A, x_B[$. La question précédente donne

$$\int_{x_A}^{x_B} G(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

pour toute fonction test η de classe $\mathcal{C}^2$ nulle aux bornes, donc en particulier pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]x_A, x_B[$.

Le lemme fondamental du calcul variationnel, sous sa forme locale, donne alors

$$\boxed{\forall x \in]x_A, x_B[, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x))\right) = 0.}$$

C'est l'équation d'Euler–Lagrange.

Question 10

On suppose que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0$$

pour tout $(x, y, z) \in]x_A, x_B[\times U \times V$.

Considérons la fonction

$$B(x) = f(x, z_0(x), z_0'(x)) - z_0'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x)).$$

En dérivant,

$$\begin{aligned} B'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x} + z_0'(x)\frac{\partial f}{\partial y} + z_0''(x)\frac{\partial f}{\partial z} - z_0''(x)\frac{\partial f}{\partial z} - z_0'(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + z_0'(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right). \end{aligned}$$

Dans cette ligne, les dérivées partielles sont évaluées en $(x, z_0(x), z_0'(x))$.

Par hypothèse, le premier terme est nul. Par l'équation d'Euler–Lagrange, le terme entre parenthèses est nul. Donc $B'(x) = 0$ sur $]x_A, x_B[$, d'où l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\boxed{\forall x \in]x_A, x_B[, \qquad f(x, z_0(x), z_0'(x)) - z_0'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x)) = C.}$$

Cette relation est l'identité de Beltrami.

III – Le chemin le plus court est la ligne droite

Question 11

Ici,

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}.$$

Cette fonction ne dépend pas de x, donc on peut appliquer l'identité de Beltrami. On a

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

Ainsi, pour la fonction extrémale y_0,

$$\begin{aligned} f(x, y_0(x), y_0'(x)) - y_0'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y_0'(x)) &= \sqrt{1 + y_0'(x)^2} - \frac{y_0'(x)^2}{\sqrt{1 + y_0'(x)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + y_0'(x)^2}}. \end{aligned}$$

Donc il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y_0'(x)^2}} = C.$$

Ainsi $y_0'(x)^2$ est constant. Comme y_0' est continue sur l'intervalle connexe $[x_A, x_B]$, la fonction y_0' est constante. Par conséquent, y_0 est affine.

Avec les conditions aux bornes, on obtient même

$$\boxed{y_0(x) = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A).}$$

Le chemin extrémal est donc le segment de droite joignant A et B.

IV – Le chemin le plus rapide est la cycloïde

On considère ici
$$f(x,y,z) = \sqrt{\frac{1+z^2}{y}}, \qquad y > 0,$$
et les courbes admissibles vérifient $y'(x) < 0$.

Question 12

La fonction f ne dépend pas de x. L'identité de Beltrami s'applique donc. Calculons
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{y}\sqrt{1+z^2}}.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} f - y'\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}. \end{aligned}$$
Il existe donc une constante $K > 0$ telle que
$$\frac{1}{\sqrt{y_0(x)}\sqrt{1+y_0'(x)^2}} = K.$$
En élevant au carré et en posant $C = K^{-2}$, on obtient
$$\boxed{\forall x \in [x_A, x_B], \qquad y_0(x)(1 + y_0'(x)^2) = C.}$$
Dans la suite, on suppose $C = 2$.

Question 13

La fonction
$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$
est définie sur
$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.}$$
Sur $]0,\pi[$, elle est continue et dérivable, et
$$\operatorname{cotan}'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\operatorname{cotan}^2 x) < 0.$$
Elle est donc strictement décroissante sur $]0,\pi[$. De plus,
$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotan} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pi^-} \operatorname{cotan} x = -\infty.$$
Par conséquent,
$$\boxed{\operatorname{cotan}_{|]0,\pi[} :]0,\pi[\to \mathbb{R} \text{ est bijective.}}$$
On note $\operatorname{arccotan} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$ sa bijection réciproque.

Pour $t \in \mathbb{R}$, si $u = \operatorname{arccotan}(t)$, alors $t = \operatorname{cotan} u$. Par dérivation réciproque,
$$\operatorname{arccotan}'(t) = \frac{1}{\operatorname{cotan}'(u)} = -\frac{1}{1+\operatorname{cotan}^2 u} = -\frac{1}{1+t^2}.$$
Donc
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arccotan}'(t) = -\frac{1}{1+t^2}.}$$

Question 14

On pose
$$\theta(x) = 2\,\mathrm{arccotan}(y_0'(x)).$$
Alors
$$y_0'(x) = \mathrm{cotan}\left(\frac{\theta(x)}{2}\right).$$
Or, d'après la question 12 avec $C = 2$,
$$y_0(x)(1 + y_0'(x)^2) = 2.$$
Donc
$$\begin{aligned} y_0(x) &= \frac{2}{1 + \mathrm{cotan}^2(\theta(x)/2)} \\ &= 2\sin^2\left(\frac{\theta(x)}{2}\right) \\ &= 1 - \cos(\theta(x)). \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\boxed{\forall x \in [x_A, x_B], \qquad y_0(x) = 1 - \cos(\theta(x)).}$$

Question 15

D'après la question précédente,
$$y_0(x) = 1 - \cos(\theta(x)).$$
En dérivant,
$$y_0'(x) = \theta'(x)\sin(\theta(x)).$$
Mais, par définition de θ,
$$y_0'(x) = \mathrm{cotan}\left(\frac{\theta(x)}{2}\right).$$
Or
$$\mathrm{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}.$$
Donc
$$\theta'(x)\sin\theta(x) = \frac{\sin\theta(x)}{1 - \cos\theta(x)}.$$
Comme $y_0'(x) < 0$, on a $\theta(x) \in]\pi, 2\pi[$, donc $\sin\theta(x) \neq 0$. Il vient
$$\theta'(x) = \frac{1}{1 - \cos\theta(x)}.$$
Par conséquent,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\theta(x) - \sin\theta(x)) = \theta'(x)(1 - \cos\theta(x)) = 1.$$
Il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que
$$\theta(x) - \sin\theta(x) = x - c,$$
ou encore, en renommant la constante,
$$\boxed{\forall x \in [x_A, x_B], \qquad x = \theta(x) - \sin(\theta(x)) + c.}$$
La courbe est donc paramétrée par
$$\boxed{\theta \longmapsto (\theta - \sin\theta + c, 1 - \cos\theta),}$$
c'est-à-dire un arc de cycloïde.

V – Une application à une structure optimale : la caténoïde

On étudie la fonctionnelle
$$T(y) = 2\pi \int_0^1 y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$
Le facteur constant 2π ne joue aucun rôle dans la recherche des extrémales. On travaille donc avec
$$f(x, y, z) = y\sqrt{1 + z^2}.$$

Question 16

La fonction f ne dépend pas de x, donc l'identité de Beltrami s'applique. On a
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{yz}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

Ainsi,
$$\begin{aligned} f - y'\frac{\partial f}{\partial z} &= y\sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \\ &= \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}}. \end{aligned}$$
Il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que
$$\frac{y_0(x)}{\sqrt{1 + y_0'(x)^2}} = K.$$
Cette constante est non nulle : si $K = 0$, alors y_0 serait nulle sur $]0, 1[$, ce qui contredirait $y_0(0) = y_0(1) = 1$ par continuité.

On obtient donc
$$1 + y_0'(x)^2 = \frac{1}{K^2}y_0(x)^2.$$
En posant
$$c = \frac{1}{K} \neq 0,$$
il vient
$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \qquad 1 + y_0'(x)^2 = c^2 y_0(x)^2.}$$

Question 17

La fonction
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus,
$$\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
On a $\operatorname{sh} x > 0$ pour $x > 0$, donc ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs,
$$\operatorname{ch}(0) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = +\infty.$$

Ainsi,
$$\boxed{\operatorname{ch}_{|\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[\text{ est bijective.}}$$

On note argch sa bijection réciproque.

Pour $t > 1$, posons $u = \operatorname{argch}(t)$. Alors $u > 0$ et $t = \operatorname{ch} u$. Par dérivation réciproque,

$$\operatorname{argch}'(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(u)} = \frac{1}{\operatorname{sh} u}.$$

Or, pour $u > 0$,

$$\operatorname{sh} u = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1} = \sqrt{t^2 - 1}.$$

Donc

$$\boxed{\forall t > 1, \qquad \operatorname{argch}'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}.}$$

La dérivée n'existe pas en $t = 1$ au sens usuel, car cette expression tend vers $+\infty$ lorsque $t \to 1^+$.

Question 18

D'après la question 16,

$$y_0'(x)^2 = c^2 y_0(x)^2 - 1.$$

Comme l'équation ne dépend que de c^2, on pose $\gamma = |c| > 0$. Sous l'hypothèse $y_0'(x) > 0$ et $\gamma^2 y_0(x)^2 > 1$, on a

$$y_0'(x) = \sqrt{\gamma^2 y_0(x)^2 - 1}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{argch}\big(\gamma y_0(x)\big) &= \frac{\gamma y_0'(x)}{\sqrt{\gamma^2 y_0(x)^2 - 1}} \\ &= \gamma.\end{aligned}$$

Donc il existe une constante réelle λ telle que

$$\operatorname{argch}\big(\gamma y_0(x)\big) = \gamma x + \lambda.$$

En appliquant ch des deux côtés,

$$\gamma y_0(x) = \operatorname{ch}(\gamma x + \lambda).$$

Ainsi,

$$\boxed{y_0(x) = \frac{1}{\gamma} \operatorname{ch}(\gamma x + \lambda), \qquad \gamma > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

En renommant γ en $c > 0$, on peut écrire

$$\boxed{y_0(x) = \frac{1}{c} \operatorname{ch}(cx + \lambda).}$$

C'est l'expression d'une chaînette ; sa surface de révolution est une caténoïde.

Remarque. L'hypothèse $y_0'(x) > 0$ sur tout $[0, 1]$ sert ici à choisir la branche positive de la racine carrée. Avec les conditions $y_0(0) = y_0(1) = 1$, elle ne peut pas être satisfaite globalement ; la formule précédente est donc à comprendre sur un intervalle où $y_0' > 0$.