Mines-Ponts 2026 — MP

Mathématiques II

Autour de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

Corrigé détaillé

Le sujet, organisé en quatre parties largement indépendantes, explore plusieurs facettes des groupes orthogonaux et spéciaux linéaires : caractérisations de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, compacité et connexité de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, calcul différentiel sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ via la fonction $M \mapsto \mathrm{tr}(M^\top M)$, puis classification des morphismes continus de $\mathbb{U}$ et de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Partie I — Quelques propriétés de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

Question 1

On a $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique est

$$\chi_{R_\theta}(X) = (X - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = X^2 - 2\cos\theta\, X + 1,$$

de discriminant $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta$.

Sur $\mathbb{C}$. Les racines $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont distinctes dès que $\sin\theta \neq 0$; R_θ est alors diagonalisable (deux valeurs propres simples). Lorsque $\sin\theta = 0$, $R_\theta = \pm I_2$ est déjà diagonale. Ainsi R_θ **est diagonalisable sur $\mathbb{C}$** pour toute valeur de θ.

Sur $\mathbb{R}$. Si $\sin\theta \neq 0$, χ_{R_θ} n'a pas de racine réelle, donc R_θ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Si $\sin\theta = 0$, $R_\theta = \pm I_2$ est diagonale. Ainsi R_θ **est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$**.

Question 2

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. La condition $M^\top M = I_2$ donne

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

Comme $a^2 + c^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$ et $c = \sin\theta$. La relation $ab + cd = 0$ s'écrit alors $\langle (a, c), (b, d)\rangle = 0$: le vecteur (b, d) est orthogonal à $(\cos\theta, \sin\theta)$, donc colinéaire à $(-\sin\theta, \cos\theta)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b = -\lambda\sin\theta$ et $d = \lambda\cos\theta$. La relation $b^2 + d^2 = 1$ impose $\lambda^2 = 1$, soit $\lambda = \pm 1$. Enfin, $\det(M) = ad - bc = \lambda(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \lambda$. La condition $\det M = 1$ force $\lambda = 1$, et l'on obtient $M = R_\theta$.

Réciproquement, R_θ vérifie $R_\theta^\top R_\theta = I_2$ et $\det R_\theta = 1$. On a donc bien $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

Question 3

Compacité. L'application $\Phi : M \mapsto M^\top M$ est polynomiale, donc continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \Phi^{-1}(\{I_n\})$ et $\{I_n\}$ est fermé, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé. Pour le caractère borné : si $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ses colonnes $C_1, \dots, C_n$ sont orthonormées, donc

$$\|M\|_F^2 = \sum_{j=1}^{n} \|C_j\|^2 = n.$$

Tout élément de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ a la même norme de Frobenius $\sqrt{n}$: $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. Fermé borné en dimension finie, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Non-connexité par arcs. Pour $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\det(M)^2 = \det(M^\top M) = 1$, donc $\det M \in \{-1, 1\}$. Posons $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+ = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^- = \{M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ \det M = -1\}$; les deux sont non vides (I_n et la matrice de symétrie $\mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$). Si $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ était un chemin continu reliant un élément de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^+$ à un élément de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^-$, l'application $\det \circ \gamma : [0, 1] \to \{-1, 1\}$ serait continue à valeurs dans un ensemble discret, donc constante : contradiction. Donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ **n'est pas connexe par arcs**.

Question 4

Cas $n = 2$. D'après la question 2, $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\}$. Pour $M = R_\theta \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, le chemin

$$\gamma : t \in [0, 1] \longmapsto R_{t\theta} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

est continu, vérifie $\gamma(0) = I_2$ et $\gamma(1) = M$. Ainsi tout élément de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est joignable à I_2 par un arc, donc $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Cas général. On utilise la réduction des isométries directes : pour tout $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, des angles $\theta_1, \ldots, \theta_p \in \mathbb{R}$ et un entier $r \geq 0$ avec $2p + r = n$ tels que

$$P^\top M P = \mathrm{diag}\big(R_{\theta_1}, R_{\theta_2}, \ldots, R_{\theta_p},\ I_r\big).$$

Le chemin

$$\gamma : t \in [0, 1] \longmapsto P\,\mathrm{diag}\big(R_{t\theta_1}, \ldots, R_{t\theta_p}, I_r\big)\,P^\top$$

est continu, à valeurs dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ (produit d'éléments de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$), avec $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = M$. Tout point de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est donc relié à I_n par un arc, et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ **est connexe par arcs**.

Question 5

Soit H un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Si $H = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, c'est terminé. Sinon, il existe $A \in H$ avec $\det A = -1$. Soit $B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ quelconque avec $\det B = -1$. Alors

$$A^{-1}B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \det(A^{-1}B) = \frac{-1}{-1} = 1,$$

donc $A^{-1}B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \subset H$. Comme $A \in H$, on en déduit $B = A \cdot (A^{-1}B) \in H$. Tout élément de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})^-$ appartient donc à H, et H contient $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \cup \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^- = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Finalement $H = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Conclusion : les seuls sous-groupes de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Question 6

Notons $q = 1 - p \in]0, 1[$.

Calcul de $P(Z_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$. On a $\det Z_2 = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$, à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. Par indépendance des deux paires (Y_{11}, Y_{22}) et (Y_{12}, Y_{21}) :

$$P(\det Z_2 = 1) = P(Y_{11}Y_{22} = 1)\, P(Y_{12}Y_{21} = 0) = p^2(1 - p^2),$$
$$P(\det Z_2 = -1) = P(Y_{11}Y_{22} = 0)\, P(Y_{12}Y_{21} = 1) = (1 - p^2)p^2.$$

D'où

$$\boxed{P(Z_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) = 2p^2(1 - p^2) = 2p^2(1 - p)(1 + p).}$$

Calcul de $P(Z_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$. Caractérisons les matrices à coefficients dans $\{0, 1\}$ qui sont orthogonales. Si $Z \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et C_j désigne sa j-ième colonne, alors $\|C_j\|^2 = \sum_{i=1}^n Y_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n Y_{ij} = 1$ (les Y_{ij} valent 0 ou 1). Donc chaque colonne contient *exactement un* coefficient égal à 1. De plus, l'orthogonalité $\langle C_i, C_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$ s'écrit $\sum_k Y_{ki}Y_{kj} = 0$: cette somme de termes positifs est nulle, donc $Y_{ki}Y_{kj} = 0$ pour tout k, autrement dit les positions des 1 dans deux colonnes différentes sont distinctes. Les colonnes de Z forment donc une permutation de la base canonique : Z est une *matrice de permutation.*

Réciproquement, toute matrice de permutation est dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Il y a $n!$ telles matrices, chacune comportant exactement n coefficients 1 et n^2-n coefficients 0. Par indépendance des Y_{ij} :

$$P(Z_n = M_\sigma) = p^n q^{n^2-n}, \quad \text{pour tout } \sigma \in S_n.$$

D'où

$$\boxed{P(Z_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = n!\, p^n q^{n(n-1)}.}$$

Calcul de $P(Z_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))$. Une matrice de permutation M_σ a pour déterminant la signature $\varepsilon(\sigma)$, donc $M_\sigma \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si σ est paire. Pour $n \geq 2$, le groupe alterné A_n a pour cardinal $n!/2$, d'où

$$\boxed{P(Z_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})) = \frac{n!}{2}\, p^n q^{n(n-1)}.}$$

(Pour $n=1$, $\mathrm{SO}_1(\mathbb{R}) = \{1\}$ et $P(Z_1 = 1) = p$.)

Question 7

Cas $x = y$. Comme $n \geq 2$, le sous-espace $x^\perp$ est non nul. Soit $v \in E$ unitaire orthogonal à x ; la réflexion $s_v : u \mapsto u - 2\langle u, v\rangle v$ vérifie alors $s_v(x) = x - 0 = x = y$.

Cas $x \neq y$. Comme $\|x\| = \|y\|$, le vecteur $x - y$ est non nul. Posons $v = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$ (unitaire). Calculons :

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = 2\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle = 2\langle x, x-y\rangle,$$

donc $\langle x, v\rangle = \dfrac{\langle x, x-y\rangle}{\|x-y\|} = \dfrac{\|x-y\|}{2}$. Il vient

$$s_v(x) = x - 2\langle x, v\rangle\, v = x - 2 \cdot \frac{\|x-y\|}{2} \cdot \frac{x-y}{\|x-y\|} = x - (x-y) = y.$$

Dans les deux cas, la matrice A de la réflexion s_v dans la base canonique satisfait $Ax = y$.

Question 8

On va construire G_p pour $p \geq 0$ par récurrence, le cas $p < 0$ s'obtenant ensuite par symétrie. Comme $\|x\| = 1$ et $G \in \mathcal{G} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $\|Gx\| > 0$.

Cas $p = 1$. Posons $y = Gx$; alors $\|y\| = \|Gx\|$. D'autre part, le vecteur $\|Gx\|\, x$ a pour norme $\|Gx\|$. Par la question 7 appliquée à y et $\|Gx\|\, x$, il existe une matrice de réflexion $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}$ telle que $A\, y = \|Gx\|\, x$, c'est-à-dire $A\, Gx = \|Gx\|\, x$. Posons $H = AG \in \mathcal{G}$; alors

$$H\, x = \|Gx\|\, x.$$

Itération. Une récurrence immédiate donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$H^k x = \|Gx\|^k\, x.$$

En effet, c'est vrai pour $k = 0, 1$, et si $H^k x = \|Gx\|^k x$, alors

$$H^{k+1} x = H(H^k x) = H(\|Gx\|^k x) = \|Gx\|^k\, Hx = \|Gx\|^{k+1}\, x.$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, $H^p \in \mathcal{G}$ (sous-groupe), donc $G_p := H^p$ convient.

Cas $p < 0$. On a $H \in \mathcal{G}$ donc $H^{-1} \in \mathcal{G}$. La relation $Hx = \|Gx\|\, x$ entraîne $H^{-1}x = \|Gx\|^{-1} x$. Une récurrence analogue donne $H^{-k}x = \|Gx\|^{-k}\, x$ pour $k \in \mathbb{N}$, et $G_p := H^p \in \mathcal{G}$ pour $p < 0$ également.

Dans tous les cas, $G_p = H^p \in \mathcal{G}$ vérifie $G_p x = \|Gx\|^p x$.

Question 9

Soit $G \in \mathcal{G}$ et $x \in E$ unitaire ; notons $\rho = \|Gx\| > 0$.

Si $\rho > 1$. D'après la question 8, pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe $G_p \in \mathcal{G}$ avec $G_p x = \rho^p x$. Pour la norme d'opérateur subordonnée à la norme euclidienne :

$$\|G_p\| \ \geq \ \|G_p x\| = \rho^p \|x\| = \rho^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty.$$

La famille $(G_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est non bornée dans $\mathcal{G}$, contredisant la compacité de $\mathcal{G}$.

Si $\rho < 1$. Le même raisonnement avec $p \to -\infty$ donne $\|G_p x\| = \rho^p \to +\infty$, ce qui contredit encore la compacité.

On a donc $\rho = \|Gx\| = 1$ pour tout vecteur unitaire x. Par homogénéité, $\|Gy\| = \|y\|$ pour tout $y \in E$: G est une isométrie linéaire, donc $G \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $\mathcal{G} \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$; combiné à l'inclusion $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}$ donnée par hypothèse, on obtient $\boxed{\mathcal{G} = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})}$.

Conclusion structurelle. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est maximal parmi les sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui le contiennent.

Partie II — Calcul différentiel sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

Question 10

L'application $f : M \mapsto M^\top M$ est polynomiale en les coefficients de M (chaque coefficient de $M^\top M$ est une somme de produits de coefficients de M), donc C^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en particulier C^1.

Pour $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$f(M+H) = (M+H)^\top (M+H) = M^\top M + M^\top H + H^\top M + H^\top H,$$

soit $f(M+H) - f(M) = (M^\top H + H^\top M) + H^\top H$. Le terme $H^\top H$ est un $O(\|H\|^2)$, et $H \mapsto M^\top H + H^\top M$ est linéaire, donc

$$\boxed{\mathrm{d}f(M)(H) = M^\top H + H^\top M.}$$

Question 11

Soit $H \in T$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dérivable en 0 avec $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$. Pour tout t, $\gamma(t) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, donc

$$(f \circ \gamma)(t) = \gamma(t)^\top \gamma(t) = I_n.$$

La fonction $f \circ \gamma$ est constante, donc sa dérivée en 0 est nulle. Or, par composition,

$$(f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}f(\gamma(0))(\gamma'(0)) = \mathrm{d}f(I_n)(H) = I_n^\top H + H^\top I_n = H + H^\top.$$

Ainsi $H + H^\top = 0$, c'est-à-dire $H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a démontré $T \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Question 12

Stabilité par somme. Soient $H_1, H_2 \in T$, donnés par des chemins $\gamma_1, \gamma_2 :]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[\to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Posons $\gamma(t) = \gamma_1(t)\,\gamma_2(t)$, défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Comme $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit, $\gamma(t) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Le produit matriciel est dérivable :

$$\gamma'(0) = \gamma_1'(0)\,\gamma_2(0) + \gamma_1(0)\,\gamma_2'(0) = H_1 \cdot I_n + I_n \cdot H_2 = H_1 + H_2.$$

On a bien $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H_1 + H_2$, donc $H_1 + H_2 \in T$.

Stabilité par multiplication scalaire. Soit $H \in T$, γ comme ci-dessus, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(\lambda t)$, défini sur un voisinage de 0 et à valeurs dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\widetilde{\gamma}(0) = I_n$ et $\widetilde{\gamma}'(0) = \lambda\,\gamma'(0) = \lambda H$, donc $\lambda H \in T$.

Élément neutre. La courbe constante $\gamma(t) = I_n$ donne $0 \in T$.

Ainsi T est non vide, stable par somme et par multiplication scalaire : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 13

On démontre l'inclusion $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset T$.

Soit $H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, donc $H^\top = -H$. Posons $\gamma(t) = \exp(tH)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Cette application est C^∞, $\gamma(0) = I_n$, et $\gamma'(0) = H$. Reste à voir $\gamma(t) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$: pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma(t)^\top\,\gamma(t) = \exp(tH)^\top\,\exp(tH) = \exp(tH^\top)\,\exp(tH) = \exp(-tH)\,\exp(tH) = \exp(0) = I_n,$$

en utilisant successivement $\exp(A)^\top = \exp(A^\top)$ et le fait que $-tH$ et tH commutent. Donc $\gamma(t) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $H \in T$.

Combiné avec la question 11, on obtient

$$\boxed{T = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

En particulier $\dim T = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Question 14

Pour $\lambda > 0$, posons $M_\lambda = \mathrm{diag}\big(\lambda,\, \lambda^{-1},\, 1, \dots, 1\big)$. Alors $\det M_\lambda = \lambda \cdot \lambda^{-1} \cdot 1 \cdots 1 = 1$, donc $M_\lambda \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. De plus,

$$g(M_\lambda) = \mathrm{tr}(M_\lambda^\top M_\lambda) = \lambda^2 + \lambda^{-2} + (n-2).$$

Lorsque $\lambda \to +\infty$, $g(M_\lambda) \to +\infty$. La restriction $g_{|\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}$ n'est donc pas majorée et ne possède pas de maximum global.

Question 15

Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$.

Gradient de g. On a $g(M) = \mathrm{tr}(M^\top M) = \sum_{i,j} M_{ij}^2$, donc pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$g(M + H) = g(M) + 2\sum_{i,j} M_{ij} H_{ij} + \sum_{i,j} H_{ij}^2 = g(M) + \langle 2M, H\rangle + O(\|H\|^2).$$

La régularité C^1 découle de cette différentiabilité, et l'on a

$$\boxed{\nabla g(M) = 2M.}$$

Gradient de det. Par développement selon la j-ième colonne :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\,\mathrm{Com}(M)_{ij},$$

où $\mathrm{Com}(M)_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ est le cofacteur d'indice (i, j) et Δ_{ij} le mineur correspondant. Comme le cofacteur $\mathrm{Com}(M)_{ij}$ ne dépend pas de M_{ij} (il est calculé sur la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j),

$$\frac{\partial \det}{\partial M_{ij}}(M) = \mathrm{Com}(M)_{ij}.$$

Ces dérivées partielles sont polynomiales, donc det est C^1 (en fait C^∞) sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et

$$\boxed{\nabla \det(M) = \mathrm{Com}(M).}$$

Question 16

Application du théorème des extrema liés. La contrainte $\det(M) = 1$ définit $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$; pour appliquer le théorème, il faut s'assurer que $\nabla \det$ ne s'annule pas sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Or sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, la formule classique $M\,\mathrm{Com}(M)^\top = \det(M)\,I_n = I_n$ entraîne $\mathrm{Com}(M)^\top = M^{-1}$, donc

$$\mathrm{Com}(M) = (M^{-1})^\top \neq 0.$$

Le théorème des extrema liés s'applique : si $g_{|\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}$ admet un extremum local en M, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla g(M) = \mu \nabla \det(M)$, c'est-à-dire $2M = \mu\,\mathrm{Com}(M)$. En posant $\lambda = \mu/2$, on obtient

$$\boxed{M = \lambda\,\mathrm{Com}(M).}$$

Caractérisation $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Reprenant l'identité $\mathrm{Com}(M) = (M^{-1})^\top$ valable car $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, la relation précédente s'écrit $M = \lambda\,(M^{-1})^\top$, soit $M^\top = \lambda\,M^{-1}$, ou encore

$$M\,M^\top = \lambda\,I_n.$$

En prenant le déterminant : $\det(M)^2 = \lambda^n$, soit $\lambda^n = 1$. En lisant le coefficient $(1,1)$: $(MM^\top)_{1,1} = \sum_{j=1}^n M_{1j}^2 = \lambda$, donc $\lambda \geq 0$, et même $\lambda > 0$ (sinon M aurait sa première ligne nulle, contredisant $\det M = 1$). De $\lambda^n = 1$ et $\lambda > 0$ on tire $\lambda = 1$. Ainsi $MM^\top = I_n$, donc $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, et comme $\det M = 1$, on a bien $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Question 17

Existence d'un minimum global. Posons $\alpha = \inf_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} g \in [0, +\infty[$, et soit $(M_k)_{k\geq 0}$ une suite de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ telle que $g(M_k) \to \alpha$. La suite $\left(\|M_k\|_F^2\right) = \left(g(M_k)\right)$ est convergente, donc bornée ; (M_k) est donc bornée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par compacité (Bolzano-Weierstrass en dimension finie), on peut extraire une sous-suite (M_{k_j}) convergeant vers $M_\infty \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme det est continue, $\det(M_\infty) = \lim \det(M_{k_j}) = 1$, donc $M_\infty \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Par continuité de g,

$$g(M_\infty) = \lim_{j\to+\infty} g(M_{k_j}) = \alpha.$$

Le minimum est donc atteint : il existe $M_\infty \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que $g(M_\infty) = \alpha$.

Calcul du minimum. En M_∞, $g_{|\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}$ admet en particulier un minimum local, donc d'après la question 16, $M_\infty \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Or pour $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a $M^\top M = I_n$ et donc $g(M) = \mathrm{tr}(I_n) = n$. Ainsi $\alpha = n$.

Lieu d'atteinte. D'après ce qui précède, tout point où le minimum est atteint appartient à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, tout $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ vérifie $g(M) = n = \alpha$. Le minimum est donc atteint exactement sur $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\min_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} g = n, \qquad \text{atteint si et seulement si } M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}).}$$

Partie III — Morphismes continus de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Question 18

Sous-groupes bornés de $(\mathbb{R}^*, \times)$. Soit H un sous-groupe borné de $\mathbb{R}^*$. Si $h \in H$ vérifiait $|h| > 1$, alors $(h^k)_{k\geq 0}$ serait non bornée ; si $|h| < 1$, alors $(h^{-k})_{k\geq 0}$ serait non bornée. Dans les deux cas, H ne serait pas borné. Donc tout $h \in H$ vérifie $|h| = 1$, soit $h \in \{-1, 1\}$. Réciproquement, $\{1\}$ et $\{-1, 1\}$ sont des sous-groupes bornés. Les seuls sous-groupes bornés de $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont donc $\{1\}$ et $\{-1, 1\}$.

Application à $\varphi(\mathbb{U})$. L'application $\det \circ \varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme continu (composée de deux morphismes continus). Comme $\mathbb{U}$ est compact, $\det \circ \varphi(\mathbb{U})$ est compact dans $\mathbb{R}^*$, donc borné. C'est par ailleurs un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ (image d'un groupe par un morphisme). Il est donc égal à $\{1\}$ ou $\{-1, 1\}$.

Mais $\mathbb{U}$ est connexe par arcs et $\det \circ \varphi$ continue, donc $\det \circ \varphi(\mathbb{U})$ est connexe par arcs ; or $\{-1, 1\}$ ne l'est pas. Donc $\det \circ \varphi(\mathbb{U}) = \{1\}$, c'est-à-dire $\varphi(\mathbb{U}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Question 19

Soit $z \in \mathbb{U}$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi(z))$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi(z)^k = \varphi(z^k)$ (puisque φ est un morphisme), et $\lambda^k \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi(z^k))$.

La continuité de φ et la compacité de $\mathbb{U}$ entraînent que $\varphi(\mathbb{U})$ est compact, donc borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il existe $C > 0$ tel que pour toute $A \in \varphi(\mathbb{U})$, $\|A\| \leq C$. Or pour toute matrice A, le rayon spectral $\rho(A)$ est majoré par $\|A\|$ (toute valeur propre μ vérifie $|\mu| \leq \|A\|$). Donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\lambda|^k = |\lambda^k| \leq \|\varphi(z^k)\| \leq C.$$

Cette inégalité, valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$, force $|\lambda| = 1$ (sinon $|\lambda|^k \to +\infty$ quand $k \to +\infty$ ou $k \to -\infty$). Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi(z)) \subset \mathbb{U}$.

Question 20

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$. Comme φ est un morphisme,

$$\Psi(x+y) = \varphi(e^{i(x+y)}) = \varphi(e^{ix} \cdot e^{iy}) = \varphi(e^{ix})\, \varphi(e^{iy}) = \Psi(x)\, \Psi(y).$$

Question 21

Régularité de F. L'application $\Psi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue (composée de $x \mapsto e^{ix}$ et de φ, toutes deux continues). Donc, par le théorème fondamental de l'analyse, $F : x \mapsto \int_0^x \Psi(t)\, dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $F'(x) = \Psi(x)$.

Inversibilité au voisinage de 0. On a $F(0) = 0$ et $F'(0) = \Psi(0) = \varphi(1) = I_n$. Posons, pour $x \neq 0$, $G(x) = \dfrac{F(x)}{x}$, et $G(0) = I_n$. La dérivabilité de F en 0 avec $F(0) = 0$ s'écrit

$$G(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} F'(0) = I_n,$$

donc G est continue en 0. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par l'application continue $\det$) et que $G(0) = I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble $G^{-1}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ est un voisinage ouvert de 0. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $G(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$. Pour $x \in [-\alpha, \alpha] \backslash \{0\}$, $F(x) = x\, G(x)$ est inversible (produit d'un scalaire non nul et d'une matrice inversible).

Question 22

Identité. Le changement de variable $u = t - x$ et la relation $\Psi(x+u) = \Psi(x)\,\Psi(u)$ donnent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+\alpha} \Psi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha} \Psi(x+u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\alpha} \Psi(x)\,\Psi(u)\,\mathrm{d}u = \Psi(x)\int_0^{\alpha} \Psi(u)\,\mathrm{d}u = \Psi(x)\,F(\alpha).$$

Comme $F(\alpha)$ est inversible (question 21, en choisissant α comme à cette question),

$$\boxed{\Psi(x) = \left(\int_x^{x+\alpha} \Psi(t)\,\mathrm{d}t\right) F(\alpha)^{-1}.}$$

Régularité C^1. L'intégrale $\int_x^{x+\alpha} \Psi(t)\,\mathrm{d}t = F(x+\alpha) - F(x)$ est C^1 en x (différence de fonctions C^1). Multipliée par la matrice constante $F(\alpha)^{-1}$, on en déduit que Ψ est C^1 sur $\mathbb{R}$. Une récurrence immédiate, en réinjectant cette régularité dans la formule, montre en fait que Ψ est C^∞.

Question 23

Posons $M = \Psi'(0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on dérive l'identité $\Psi(x+y) = \Psi(x)\,\Psi(y)$ par rapport à y, à x fixé : $\Psi'(x+y) = \Psi(x)\,\Psi'(y)$. En $y = 0$,

$$\Psi'(x) = \Psi(x)\,\Psi'(0) = \Psi(x)\,M.$$

La fonction Ψ est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire $Y' = YM$, avec la condition initiale $\Psi(0) = \varphi(1) = I_n$.

La fonction $x \mapsto \exp(xM)$ est aussi solution : sa dérivée vaut $M\exp(xM) = \exp(xM)\,M$ (puisque M commute avec $\exp(xM)$), et sa valeur en 0 est I_n. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy linéaire,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi(x) = \varphi(e^{ix}) = \exp(xM).}$$

Partie IV — Morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$

Question 24

Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$, soit $AP = PB$. Décomposons $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'égalité $AP = PB$ s'écrit

$$AP_1 + i\,AP_2 = P_1B + i\,P_2B,$$

ce qui, par identification des parties réelle et imaginaire (les coefficients étant réels), donne

$$AP_1 = P_1B \qquad \text{et} \qquad AP_2 = P_2B.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $P_t = P_1 + tP_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on a alors $A\,P_t = P_t\,B$ par linéarité.

Il reste à trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que P_t soit inversible. La fonction $Q : t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$ est polynomiale en t (à coefficients dans $\mathbb{R}$), de degré au plus n. Comme $Q(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det(P) \neq 0$ (puisque P est inversible), Q n'est pas le polynôme nul ; il admet donc au plus n racines réelles. Il existe par conséquent $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Q(t_0) \neq 0$, soit $P_{t_0} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors $A = P_{t_0}\,B\,P_{t_0}^{-1}$: A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 25

Supposons par l'absurde $\ker N = \ker N^2$. Montrons par récurrence sur $k \geq 1$ que $\ker N^k = \ker N$.

L'inclusion $\ker N \subset \ker N^k$ est triviale. Pour $k = 1, 2$, l'égalité est l'hypothèse. Supposons-la établie au rang $k \geq 2$ et prenons $x \in \ker N^{k+1}$. Alors $N^{k+1}x = N^k(Nx) = 0$, donc $Nx \in \ker N^k =$

$\ker N$, ce qui donne $N^2x = N(Nx) = 0$, soit $x \in \ker N^2 = \ker N$. Donc $\ker N^{k+1} \subset \ker N$, d'où l'égalité.

N étant nilpotente, il existe $p \geq 1$ tel que $N^p = 0$, donc $\ker N^p = \mathbb{C}^n$. La récurrence donne $\ker N = \ker N^p = \mathbb{C}^n$, soit $N = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $N \neq 0$.

Conclusion : $\ker N \subsetneq \ker N^2$.

Question 26

Calcul de $\exp(2\pi M)$. D'après la question 23, $\Psi(x) = \exp(xM) = \varphi(e^{ix})$. En $x = 2\pi$,

$$\exp(2\pi M) = \varphi(e^{2i\pi}) = \varphi(1) = I_n.$$

Conséquence sur $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, et soit $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé : $MX = \lambda X$. Alors $M^kX = \lambda^kX$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc

$$\exp(2\pi M)\, X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2\pi)^k}{k!}\, M^kX = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2\pi\lambda)^k}{k!}\, X = e^{2\pi\lambda}\, X.$$

Or $\exp(2\pi M) = I_n$, donc $e^{2\pi\lambda}X = X$, et comme $X \neq 0$, $e^{2\pi\lambda} = 1$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi\lambda = 2ik\pi$, soit $\lambda = ik$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{ik,\ k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Question 27

Décomposition de Dunford de M. Comme $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{C}$, donc M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$. Soit P_M son polynôme caractéristique : par le théorème de Dunford (ou Jordan-Chevalley), il existe une unique décomposition

$$M = D_0 + N_0,$$

avec $D_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, $N_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, $D_0N_0 = N_0D_0$, et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D_0) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$.

D_0 étant diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $D_0 = PDP^{-1}$, avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D_0) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. Posons $N = P^{-1}N_0P$; alors N est nilpotente (semblable à N_0), et la commutation $D_0N_0 = N_0D_0$ devient $DN = ND$ après conjugaison par P. Enfin,

$$M = D_0 + N_0 = P(D + N)P^{-1},$$

ce qui prouve que M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à $D+N$, avec D diagonale, N nilpotente, $DN = ND$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$.

Question 28

Calcul de $\exp(2\pi D)$. D'après la question 26, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{ik,\ k \in \mathbb{Z}\}$. La matrice $D = \mathrm{diag}(ik_1, ik_2, \dots, ik_n)$, avec $k_j \in \mathbb{Z}$, vérifie donc

$$\exp(2\pi D) = \mathrm{diag}\big(e^{2i\pi k_1}, \dots, e^{2i\pi k_n}\big) = I_n.$$

Calcul de $\exp(2\pi N)$. La matrice M étant semblable à $D + N$, $\exp(2\pi M)$ est semblable à $\exp(2\pi(D + N))$. Comme D et N commutent,

$$\exp(2\pi(D + N)) = \exp(2\pi D)\, \exp(2\pi N) = I_n \cdot \exp(2\pi N) = \exp(2\pi N).$$

Par ailleurs $\exp(2\pi M) = I_n$ (question 26) et $\exp(2\pi M)$ est semblable à $\exp(2\pi(D + N))$, donc $\exp(2\pi(D + N)) = I_n$. Conclusion :

$$\exp(2\pi N) = I_n.$$

N **est nulle.** Soit $p \geq 1$ l'indice de nilpotence de N ($N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$ si $N \neq 0$, ou $p = 0$ si $N = 0$). On a

$$\exp(2\pi N) - I_n = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(2\pi)^k}{k!} N^k = N\,B \qquad \text{où} \qquad B = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(2\pi)^k}{k!} N^{k-1} = 2\pi I_n + \sum_{k=2}^{p-1} \frac{(2\pi)^k}{k!} N^{k-1}.$$

La matrice B s'écrit $2\pi I_n + 2\pi^2 N + \cdots$: c'est la somme du multiple non nul $2\pi I_n$ de l'identité et d'une matrice nilpotente (combinaison linéaire de $N, N^2, \ldots, N^{p-2}$, qui sont nilpotentes et commutent). Donc B est inversible (toute matrice de la forme $\lambda I_n +$ nilpotente avec $\lambda \neq 0$ est inversible).

Or $\exp(2\pi N) = I_n$ donne $NB = 0$, et la multiplication à droite par B^{-1} donne $N = 0$.

Question 29

D'après la question 28, $N = 0$, donc M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(ik'_1, \ldots, ik'_n)$ avec $k'_j \in \mathbb{Z}$. Mieux : par la question 24, comme $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'on cherche la similitude réelle, regroupons d'abord les valeurs propres complexes conjuguées.

Structure des valeurs propres. M étant à coefficients réels, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ est stable par conjugaison complexe, et la multiplicité de $\overline{\lambda}$ égale celle de λ. Les valeurs propres non nulles, de la forme ik avec $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se regroupent par paires $\{ik, -ik\}$. La valeur propre 0, si elle apparaît, l'est avec multiplicité $r \geq 0$.

Notons les paires $\{\pm ik_1\}, \ldots, \{\pm ik_p\}$ avec $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (chaque k_j apparaît avec sa multiplicité), de sorte que $n = 2p + r$.

Modèle réel. Pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, la matrice $J_k = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a pour polynôme caractéristique $X^2 + k^2$, donc valeurs propres ik et $-ik$. Elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et semblable à $\operatorname{diag}(ik, -ik)$. Définissons

$$M_0 = \operatorname{diag}(J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_p},\, 0_r) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Alors M_0 est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, de spectre $\{ik_1, -ik_1, \ldots, ik_p, -ik_p, 0, \ldots, 0\}$, identique à celui de M. Toutes deux étant diagonalisables sur $\mathbb{C}$ avec mêmes valeurs propres et mêmes multiplicités, M et M_0 sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La question 24 entraîne qu'elles le sont également dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = Q\,M_0\,Q^{-1}$.

Calcul de $\Psi(x) = \exp(xM)$. Par compatibilité de l'exponentielle avec la similitude et la diagonalité par blocs,

$$\exp(xM) = Q\,\exp(xM_0)\,Q^{-1} = Q\,\operatorname{diag}\big(\exp(xJ_{k_1}), \ldots, \exp(xJ_{k_p}), \exp(0_r)\big)\,Q^{-1}.$$

Pour chaque j, $J_{k_j}^2 = -k_j^2 I_2$, et un calcul direct (ou la formule de Rodrigues) donne

$$\exp(xJ_{k_j}) = \cos(xk_j)\,I_2 + \frac{\sin(xk_j)}{k_j}\,J_{k_j} = \begin{pmatrix} \cos(xk_j) & -\sin(xk_j) \\ \sin(xk_j) & \cos(xk_j) \end{pmatrix} = R_{xk_j}.$$

Comme $\exp(0_r) = I_r$, on obtient finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi(x) = Q\,\operatorname{diag}\big(R_{xk_1}, R_{xk_2}, \ldots, R_{xk_p},\, I_r\big)\,Q^{-1}.}$$

Question 30

Soit Ψ défini par la formule de la question 29. Notons $D(x) = \operatorname{diag}(R_{xk_1}, \ldots, R_{xk_p}, I_r) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Psi(x) = Q\,D(x)\,Q^{-1}$.

Image dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Chaque $R_{xk_j} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ a pour déterminant 1, donc $\det(D(x)) = 1$ et $D(x) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par conjugaison, $\Psi(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $\det(\Psi(x)) = 1$.

Caractère morphisme. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, la formule d'addition des angles donne $R_{(x+y)k_j} = R_{xk_j}\, R_{yk_j}$ (on a en effet $R_a R_b = R_{a+b}$ dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$). En appliquant cela bloc par bloc,

$$D(x+y) = \operatorname{diag}\big(R_{(x+y)k_1}, \ldots, R_{(x+y)k_p}, I_r\big) = \operatorname{diag}\big(R_{xk_1}R_{yk_1}, \ldots, R_{xk_p}R_{yk_p}, I_r\big) = D(x)\,D(y),$$

les blocs I_r contribuant trivialement. Donc

$$\Psi(x+y) = Q\,D(x+y)\,Q^{-1} = Q\,D(x)\,D(y)\,Q^{-1} = \big(Q\,D(x)\,Q^{-1}\big)\big(Q\,D(y)\,Q^{-1}\big) = \Psi(x)\,\Psi(y).$$

Enfin, $\Psi(0) = Q\,I_n\,Q^{-1} = I_n$ et la continuité (et même la classe C^∞) de Ψ est claire. Ψ est donc bien un morphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

FIN DU CORRIGÉ
