Correction complète

Concours Mines-Télécom 2026 – Mathématiques I PC

Sommes d'endomorphismes de carré nul

Excellence Maths

Dans tout le corrigé, les espaces vectoriels considérés sont complexes et de dimension finie. On note

$$\mathcal{C}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : u^2 = 0\}.$$

Pour une matrice élémentaire, on utilise la convention

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}.$$

A. Réduction des endomorphismes de carré nul

On fixe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$, $u \neq 0$, et on note $r = \mathrm{rg}(u)$.

1. Valeurs propres et trace

Soit λ une valeur propre de u et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors

$$u(x) = \lambda x.$$

En appliquant une seconde fois u, on obtient

$$0 = u^2(x) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x.$$

Comme $x \neq 0$, on a $\lambda^2 = 0$, donc $\lambda = 0$.

Ainsi, la seule valeur propre possible de u est 0. Comme le corps de base est $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de u est scindé, et la trace est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité. On en déduit

$$\boxed{\mathrm{tr}(u) = 0.}$$

2. Comparaison de l'image et du noyau

Pour tout $x \in E$, on a

$$u(u(x)) = u^2(x) = 0.$$

Donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$, ce qui donne

$$\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u).$$

Ainsi

$$r = \dim \mathrm{Im}(u) \leq \dim \mathrm{Ker}(u).$$

Par le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Ker}(u) = n - r.$$

Donc

$$r \leq n - r,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{r \leq \frac{n}{2}.}$$

3. Choix d'un supplémentaire du noyau

Par le théorème du rang,
$$\dim E - \dim \mathrm{Ker}(u) = r.$$

Il existe donc un supplémentaire F de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E de dimension r :

$$E = \mathrm{Ker}(u) \oplus F.$$

On choisit une base $(e_1, \ldots, e_r)$ de F. Alors

$$\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r) = E.$$

Montrons que $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est libre. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u(e_i) = 0.$$

Alors
$$u\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i\right) = 0.$$

Donc $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i \in \mathrm{Ker}(u)$. Mais ce vecteur appartient aussi à $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$. Comme $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus F$, on a $\mathrm{Ker}(u) \cap F = \{0\}$, donc

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i = 0.$$

La famille $(e_1, \ldots, e_r)$ étant libre, tous les α_i sont nuls. Ainsi

$$\boxed{(u(e_1), \ldots, u(e_r)) \text{ est libre.}}$$

4. Forme matricielle par blocs

La famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(u)$, car $u^2 = 0$. On la complète en une base de $\mathrm{Ker}(u)$:
$$(u(e_1), \ldots, u(e_r), g_1, \ldots, g_{n-2r}).$$

Alors la famille
$$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, u(e_1), \ldots, u(e_r), g_1, \ldots, g_{n-2r})$$
est une base de E.

Dans cette base, l'image de e_i est le i-ième vecteur du second bloc, tandis que les autres vecteurs de base sont envoyés sur 0 :

$$u(e_i) = u(e_i), \qquad u(u(e_i)) = 0, \qquad u(g_j) = 0.$$

La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_r & 0_r & (0) \\ I_r & 0_r & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2r} \end{pmatrix}.}$$

5. Forme canonique et unicité de l'entier m

La question précédente donne l'existence d'une base dans laquelle u est représenté par

$$\begin{pmatrix} 0_r & 0_r & (0) \\ I_r & 0_r & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2r} \end{pmatrix}.$$

On peut donc prendre $m = r$. Comme $u \neq 0$, $r > 0$.

Réciproquement, si u est représenté dans une base par une matrice

$$\begin{pmatrix} 0_m & 0_m & (0) \\ I_m & 0_m & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2m} \end{pmatrix},$$

son rang vaut exactement m. Or le rang d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie. Ainsi m est nécessairement égal à $\mathrm{rg}(u)$.

Donc il existe un unique entier $m > 0$, à savoir

$$\boxed{m = \mathrm{rg}(u),}$$

ayant la propriété demandée.

B. Somme d'un nombre arbitraire d'endomorphismes de carré nul

On fixe $n \geq 2$ et l'on travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

6. Matrices élémentaires et matrices $F_{i,j}$

On a

$$E_{i,j}^2 = E_{i,j}E_{i,j} = \delta_{j,i}E_{i,j}.$$

Ainsi

$$\boxed{E_{i,j}^2 = 0 \iff i \neq j.}$$

Pour $i \neq j$, on pose

$$F_{i,j} = E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} - E_{j,i}.$$

Sur le plan engendré par les vecteurs de base e_i, e_j, la matrice de $F_{i,j}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

et elle est nulle sur les autres coordonnées. Or

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boxed{F_{i,j}^2 = 0.}$$

7. Description de l'hyperplan des matrices de trace nulle

On note
$$\mathcal{H}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}.$$
Toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{H}_n$ se décompose comme somme de sa partie hors diagonale et de sa partie diagonale :
$$A = \sum_{i \neq j} a_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i}.$$
Comme $\mathrm{tr}(A) = 0$, on a
$$a_{n,n} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i}.$$
Donc
$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i}(E_{i,i} - E_{n,n}).$$
Or, pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,
$$F_{i,n} = E_{i,i} - E_{n,n} + E_{i,n} - E_{n,i},$$
d'où
$$E_{i,i} - E_{n,n} = F_{i,n} - E_{i,n} + E_{n,i}.$$
Ainsi toute matrice de $\mathcal{H}_n$ est combinaison linéaire de matrices de l'une des deux formes suivantes :
$$E_{i,j} \quad (i \neq j), \qquad F_{i,n} \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

8. Conclusion : $\Sigma_\infty \mathcal{C}(E) = \mathcal{H}(E)$

D'abord, si $N^2 = 0$, la partie A montre que $\mathrm{tr}(N) = 0$. Par linéarité de la trace, toute somme finie d'endomorphismes de carré nul est donc de trace nulle :
$$\Sigma_\infty \mathcal{C}(E) \subset \mathcal{H}(E).$$

Réciproquement, soit $u \in \mathcal{H}(E)$. Dans une base de E, la matrice de u appartient à $\mathcal{H}_n$. D'après la question précédente, elle est combinaison linéaire de matrices des formes $E_{i,j}$, $i \neq j$, et $F_{i,n}$. Or toutes ces matrices sont de carré nul d'après la question 6. De plus, si $N^2 = 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(\lambda N)^2 = 0$.

Ainsi toute combinaison linéaire finie de ces matrices est une somme finie de matrices de carré nul. Donc
$$\mathcal{H}(E) \subset \Sigma_\infty \mathcal{C}(E).$$
Finalement,
$$\boxed{\Sigma_\infty \mathcal{C}(E) = \mathcal{H}(E).}$$

C. Somme de trois endomorphismes de carré nul

On suppose ici $n \geq 5$. On utilise, uniquement dans cette partie, le théorème de Wang et Wu :
$$u \in \Sigma_2 \mathcal{C}(E) \iff \exists \varphi \in \mathrm{GL}(E), \quad -u = \varphi u \varphi^{-1}.$$

9. Construction d'un endomorphisme convenable

On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et on définit u par

$$u(e_i) = e_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \qquad u(e_n) = -(n-1)e_n.$$

La matrice de u est donc

$$\operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1 \text{ fois}}, -(n-1)).$$

Sa trace vaut

$$(n-1) - (n-1) = 0.$$

De plus,

$$\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}),$$

donc la multiplicité géométrique de la valeur propre 1 vaut

$$d = n - 1.$$

Comme $n \geq 5$,

$$n - 1 > \frac{3n}{4}.$$

Ainsi u satisfait les contraintes imposées.

10. Majoration du rang de $(w - v)^2$

On pose

$$w = u - \operatorname{Id}_E.$$

Alors

$$\operatorname{Ker}(w) = \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$$

est de dimension $d > 3n/4$. Par conséquent

$$\operatorname{rg}(w) = n - d < \frac{n}{4}.$$

Soit $v \in \mathcal{C}(E)$, c'est-à-dire $v^2 = 0$. Posons

$$T = w - v.$$

Alors

$$T^2 = (w-v)^2 = w^2 - wv - vw = w(w-v) - vw = wT - vw.$$

Ainsi

$$\operatorname{rg}(T^2) \leq \operatorname{rg}(wT) + \operatorname{rg}(vw) \leq \operatorname{rg}(w) + \operatorname{rg}(w) = 2\operatorname{rg}(w).$$

Donc

$$\operatorname{rg}((w-v)^2) < 2 \cdot \frac{n}{4} = \frac{n}{2}.$$

On a bien

$$\boxed{\operatorname{rg}((w-v)^2) < \frac{n}{2}.}$$

11. Multiplicité de la valeur propre 1 de $u - v$

On garde $T = w - v$. Le sous-espace
$$F = \mathrm{Ker}(T^2)$$
est stable par T, car si $x \in F$, alors
$$T^2(Tx) = T^3x = T(T^2x) = 0.$$
Il est donc aussi stable par
$$u - v = \mathrm{Id}_E + w - v = \mathrm{Id}_E + T.$$
Sur F, on a $T^2 = 0$. Ainsi l'endomorphisme induit par T sur F est nilpotent, donc toutes ses valeurs propres sont nulles. Par conséquent, l'endomorphisme induit par $u - v = \mathrm{Id}_E + T$ sur F n'a que la valeur propre 1.

Comme
$$\dim F = n - \mathrm{rg}(T^2),$$
le polynôme caractéristique de $(u - v)_{|F}$ est
$$(X - 1)^{\dim F}.$$
Puisque F est stable par $u - v$, le polynôme caractéristique de $(u - v)_{|F}$ divise celui de $u - v$. Donc 1 est valeur propre de $u - v$ avec multiplicité algébrique au moins
$$\dim F = n - \mathrm{rg}((w - v)^2).$$
Ainsi
$$\boxed{m_{u-v}(1) \geq n - \mathrm{rg}((w - v)^2).}$$
En particulier, d'après la question 10,
$$m_{u-v}(1) > \frac{n}{2}.$$

12. Conséquence d'une similitude entre $u - v$ et $-(u - v)$

Supposons qu'il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ tel que
$$-(u - v) = \varphi(u - v)\varphi^{-1}.$$
Alors $u - v$ et $-(u - v)$ sont semblables, donc ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités algébriques.

D'après la question 11, 1 est valeur propre de $u - v$ de multiplicité strictement supérieure à $n/2$. Comme $u - v$ et $-(u - v)$ sont semblables, 1 est aussi valeur propre de $-(u - v)$ avec cette même multiplicité. Cela signifie que -1 est valeur propre de $u - v$ avec multiplicité strictement supérieure à $n/2$.

Ainsi
$$\boxed{1 \text{ et } -1 \text{ sont valeurs propres de } u - v \text{ de multiplicités strictement supérieures à } \frac{n}{2}.}$$

13. Non-appartenance à $\Sigma_3\mathcal{C}(E)$

Supposons par l'absurde que
$$u \in \Sigma_3\mathcal{C}(E).$$
Il existe alors $a, b, c \in \mathcal{C}(E)$ tels que
$$u = a + b + c.$$
Posons $v = c$. Alors
$$u - v = a + b \in \Sigma_2\mathcal{C}(E).$$
D'après le théorème de Wang et Wu, il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ tel que
$$-(u - v) = \varphi(u - v)\varphi^{-1}.$$
La question précédente implique que $u - v$ possède deux valeurs propres distinctes, 1 et -1, chacune de multiplicité algébrique strictement supérieure à $n/2$. La somme de ces deux multiplicités serait alors strictement supérieure à n, ce qui est impossible en dimension n.

Donc
$$\boxed{u \notin \Sigma_3\mathcal{C}(E).}$$

D. Intermède : matrices de Hessenberg

Dans cette partie, une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite de Hessenberg lorsque
$$i > j + 1 \implies a_{i,j} = 0,$$
et régulière lorsque
$$a_{i+1,i} \neq 0 \qquad (1 \leq i \leq n - 1).$$
Pour $C \in \mathbb{C}^{n-1}$, on note
$$E_C = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & C \\ (0) & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Les polynômes P_k

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Hessenberg régulière. Posons
$$M(x) = xI_n - A.$$
On considère la matrice obtenue en retirant à $M(x)$ sa k-ième ligne et sa n-ième colonne.

Les lignes restantes sont
$$1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n,$$
et les colonnes restantes sont
$$1, \dots, k - 1, k, \dots, n - 1.$$
Avec ce découpage, la matrice est triangulaire par blocs :
$$\widetilde{M(x)}^{(k,n)} = \begin{pmatrix} B_k(x) & * \\ 0 & T_k \end{pmatrix},$$
où
$$B_k(x) = xI_{k-1} - A_{[1,k-1],[1,k-1]},$$

et où T_k est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont

$$-a_{k+1,k}, -a_{k+2,k+1}, \ldots, -a_{n,n-1}.$$

En effet, la propriété de Hessenberg impose l'annulation du bloc inférieur gauche, et le bloc T_k est triangulaire supérieur.

On obtient donc

$$\det\left(\widetilde{(xI_n - A)}^{(k,n)}\right) = \det(B_k(x))\det(T_k).$$

Or $\det(B_k(x))$ est un polynôme unitaire de degré $k-1$, et

$$\det(T_k) = (-1)^{n-k}\prod_{j=k}^{n-1} a_{j+1,j}.$$

Comme A est régulière, ce produit est non nul. On peut donc poser

$$P_k(x) = \det\left(\widetilde{(xI_n - A)}^{(k,n)}\right).$$

Alors P_k est l'unique polynôme vérifiant l'égalité demandée, et il est de degré $k-1$.

Son coefficient dominant est

$$\boxed{(-1)^{n-k}\prod_{j=k}^{n-1} a_{j+1,j}.}$$

Pour $k = n$, le produit vide vaut 1, et le coefficient dominant vaut bien 1.

15. Modification de la dernière colonne

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n dont le coefficient de X^{n-1} est $-\operatorname{tr}(A)$.

Écrivons

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

La matrice $A + E_C$ ne diffère de A que par les $n-1$ premiers coefficients de sa dernière colonne. Ainsi

$$xI_n - (A + E_C) = xI_n - A - E_C.$$

En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$\chi_{A+E_C}(x) = \chi_A(x) - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+n}c_k P_k(x),$$

où

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A).$$

Le polynôme χ_A est unitaire de degré n et son coefficient de X^{n-1} vaut $-\operatorname{tr}(A)$. Par hypothèse, P a le même coefficient dominant et le même coefficient de degré $n-1$. Donc

$$P - \chi_A \in \mathbb{C}_{n-2}[X].$$

D'après la question 14, les polynômes

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$$

ont des degrés respectifs

$$0, 1, \dots, n-2$$

et des coefficients dominants non nuls. Ils forment donc une base de $\mathbb{C}_{n-2}[X]$.

Il existe donc un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que

$$P - \chi_A = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k P_k.$$

En choisissant

$$-(-1)^{k+n} c_k = \lambda_k,$$

on obtient un unique vecteur $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que

$$\chi_{A+E_C} = P.$$

Donc

$$\boxed{\exists!\, C \in \mathbb{C}^{n-1} \text{ tel que } A + E_C \text{ ait } P \text{ pour polynôme caractéristique.}}$$

16. Cas de J_n et du polynôme X^n

La matrice

$$J_n = (\delta_{i,j+1})_{1 \le i,j \le n}$$

est nilpotente et vérifie

$$J_n^n = 0.$$

Son polynôme caractéristique est donc

$$\chi_{J_n}(X) = X^n.$$

D'après l'unicité obtenue à la question précédente, le seul vecteur $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $J_n + E_C$ ait X^n pour polynôme caractéristique est donc le vecteur nul :

$$\boxed{C = 0_{\mathbb{C}^{n-1}}.}$$

17. Une base cyclique

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base dans laquelle la matrice de u est une matrice de Hessenberg régulière $A = (a_{i,j})$.

La propriété de Hessenberg donne, pour $1 \le j \le n-1$,

$$u(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{j+1}),$$

et le coefficient de e_{j+1} dans $u(e_j)$ est

$$a_{j+1,j} \neq 0.$$

Par récurrence sur k, on obtient

$$u^k(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}),$$

et le coefficient de e_{k+1} dans $u^k(e_1)$ vaut

$$\prod_{j=1}^{k} a_{j+1,j},$$

avec produit vide égal à 1 lorsque $k = 0$.

Ce produit est non nul puisque A est régulière. Ainsi, la matrice des coordonnées de la famille

$$(e_1, u(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1))$$

dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est triangulaire avec des coefficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc inversible.

Donc

$$\boxed{(u^k(e_1))_{0 \le k \le n-1} \text{ est une base de } E.}$$

18. Matrice de Hessenberg régulière de polynôme caractéristique X^n

Soit A une matrice de Hessenberg régulière dont le polynôme caractéristique est X^n. Soit u l'endomorphisme associé dans une base $(e_1, \dots, e_n)$.

D'après la question précédente,

$$\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1))$$

est une base de E.

Comme le polynôme caractéristique de u est X^n, le théorème de Cayley-Hamilton donne

$$u^n = 0.$$

Dans la base $\mathcal{B}$, on a alors

$$u(e_1) = u(e_1), \quad u(u(e_1)) = u^2(e_1), \quad \dots, \quad u(u^{n-2}(e_1)) = u^{n-1}(e_1),$$

et

$$u(u^{n-1}(e_1)) = u^n(e_1) = 0.$$

La matrice de u dans cette base est donc exactement J_n.

Ainsi

$$\boxed{A \text{ est semblable à } J_n.}$$

E. Somme de quatre endomorphismes de carré nul

On fixe $n \geq 2$. Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite presque triangulaire supérieure lorsque

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{dès que } i > j,$$

sauf éventuellement pour le couple $(i, j) = (n, n-1)$, et l'on impose

$$a_{n,n-1} \neq 0.$$

On note également

$$V = (\delta_{i,j+1} \mathbf{1}_{i \neq n})_{1 \le i,j \le n},$$

c'est-à-dire la matrice ayant les mêmes lignes que J_n, sauf la dernière qui est nulle.

19. Passage à une matrice semblable à J_n

Soit A presque triangulaire supérieure et de trace nulle. Pour tout $C \in \mathbb{C}^{n-1}$, la matrice

$$A + V + E_C$$

est de Hessenberg. De plus, elle est régulière :

$$(A + V + E_C)_{i+1,i} = 1 \quad (1 \leq i \leq n-2),$$

et

$$(A + V + E_C)_{n,n-1} = a_{n,n-1} \neq 0.$$

Sa trace est celle de A, donc elle est nulle.

On applique la question 15 à la matrice de Hessenberg régulière $A + V$ et au polynôme

$$P(X) = X^n.$$

Ce polynôme est unitaire de degré n, et son coefficient de X^{n-1} est $0 = -\operatorname{tr}(A+V)$. Il existe donc $C_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que

$$A + V + E_{C_0}$$

ait X^n pour polynôme caractéristique.

Par la question 18, on en déduit que

$$\boxed{A + V + E_{C_0} \text{ est semblable à } J_n.}$$

20. Décomposition de J_n en deux matrices de carré nul

On écrit

$$J_n = \sum_{j=1}^{n-1} E_{j+1,j}.$$

Posons

$$B_1 = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n-1 \\ j \text{ impair}}} E_{j+1,j}, \qquad B_2 = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n-1 \\ j \text{ pair}}} E_{j+1,j}.$$

Alors

$$J_n = B_1 + B_2.$$

Montrons que $B_1^2 = 0$. Un produit de deux termes de B_1 est de la forme

$$E_{i+1,i} E_{j+1,j} = \delta_{i,j+1} E_{i+1,j}.$$

Il ne peut être non nul que si $i = j + 1$. Mais deux entiers consécutifs n'ont pas la même parité, donc cette condition est impossible lorsque i et j sont tous deux impairs. Ainsi $B_1^2 = 0$.

Le même argument vaut pour B_2, puisque deux entiers pairs ne peuvent pas être consécutifs. Donc

$$\boxed{J_n \in \Sigma_2 \mathcal{C}(\mathbb{C}^n).}$$

21. Décomposition de $V + E_C$ en deux matrices de carré nul

Soit
$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

Alors
$$V + E_C = \sum_{j=1}^{n-2} E_{j+1,j} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j E_{j,n}.$$

On pose
$$B_1 = \sum_{\substack{1 \le j \le n-2 \\ j \text{ impair}}} E_{j+1,j} + \sum_{\substack{1 \le j \le n-2 \\ j \text{ pair}}} c_j E_{j,n} + c_{n-1} E_{n-1,n},$$

et
$$B_2 = \sum_{\substack{1 \le j \le n-2 \\ j \text{ pair}}} E_{j+1,j} + \sum_{\substack{1 \le j \le n-2 \\ j \text{ impair}}} c_j E_{j,n}.$$

On a clairement
$$V + E_C = B_1 + B_2.$$

Vérifions que $B_1^2 = 0$. Les produits possibles sont de trois types.

— Deux termes de la forme $E_{j+1,j}$: ils ne donnent un produit non nul que pour deux indices consécutifs, ce qui est incompatible avec le fait que les indices présents dans B_1 sont impairs.

— Deux termes de la forme $E_{j,n}$: leur produit est toujours nul, car $j \le n-1$.

— Un terme $E_{j+1,j}$ et un terme $E_{i,n}$: le produit
$$E_{j+1,j} E_{i,n}$$
est non nul seulement si $j = i$. Or, dans B_1, le terme $E_{j+1,j}$ apparaît pour j impair, tandis que $E_{j,n}$ apparaît pour j pair, sauf pour $j = n-1$; mais il n'y a pas de terme $E_{n,n-1}$ dans V. Donc ce produit est nul. L'autre ordre de multiplication est toujours nul, car il faudrait atteindre la ligne n, qui n'apparaît pas comme cible dans V.

Ainsi $B_1^2 = 0$.

Le raisonnement est identique pour B_2, en échangeant les parités. Donc
$$\boxed{V + E_C \in \Sigma_2 \mathcal{C}(\mathbb{C}^n).}$$

22. Existence d'un plan stable non scalaire

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui n'est pas une homothétie.

Si u possède deux valeurs propres distinctes λ et μ, on choisit des vecteurs propres non nuls x et y associés. Alors
$$P = \mathrm{Vect}(x, y)$$
est un plan stable par u. De plus, $x + y$ n'est pas un vecteur propre de u, car
$$u(x + y) = \lambda x + \mu y$$
ne peut pas être colinéaire à $x + y$ lorsque $\lambda \neq \mu$.

Sinon, u possède une seule valeur propre λ. Comme u n'est pas l'homothétie $\lambda\mathrm{Id}$, l'endomorphisme
$$N = u - \lambda\mathrm{Id}$$

est nilpotent non nul. On choisit z et un entier $r \geq 1$ tels que

$$N^r z \neq 0, \qquad N^{r+1} z = 0.$$

Posons

$$y = N^r z, \qquad x = N^{r-1} z.$$

Alors

$$Nx = y \neq 0, \qquad Ny = 0.$$

Le plan

$$P = \mathrm{Vect}(x, y)$$

est stable par N, donc par $u = \lambda \mathrm{Id} + N$. De plus, x n'est pas vecteur propre de u, car

$$u(x) = \lambda x + y$$

avec $y \neq 0$ et y non colinéaire à x.

Dans tous les cas,

$$\boxed{\text{il existe un plan stable par } u \text{ contenant un vecteur non propre de } u.}$$

23. Forme par blocs

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ non homothétique. D'après la question précédente, il existe un plan P stable par u contenant un vecteur e_1 non propre de u.

Alors e_1 et $u(e_1)$ sont libres. Posons

$$e_2 = u(e_1).$$

La famille (e_1, e_2) est une base de P, et la matrice de $u_{|P}$ dans cette base a une première colonne égale à

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, si l'on note cette matrice $B = (b_{i,j})$, on a

$$b_{2,1} = 1 \neq 0.$$

Comme P est stable, u induit un endomorphisme sur le quotient $\mathbb{C}^n/P$. Sur $\mathbb{C}$, cet endomorphisme est triangularisable. On choisit donc une base du quotient dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure, puis on relève cette base en des vecteurs $f_1, \ldots, f_{n-2}$ de $\mathbb{C}^n$.

Dans la base

$$(e_1, e_2, f_1, \ldots, f_{n-2}),$$

la matrice de u est de la forme

$$\boxed{\begin{pmatrix} B & (?) \\ (0) & C \end{pmatrix}}$$

où $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $b_{2,1} \neq 0$, et $C \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure.

24. Similarité avec une matrice presque triangulaire supérieure

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ non homothétique. On applique la question 22 à l'endomorphisme dual u^*, qui n'est pas non plus une homothétie. Il existe donc un plan $P \subset (\mathbb{C}^n)^*$ stable par u^* tel que l'endomorphisme induit $u^*_{|P}$ ne soit pas une homothétie.

Posons
$$F = P^\circ = \{x \in \mathbb{C}^n : \varphi(x) = 0 \text{ pour tout } \varphi \in P\}.$$

Alors F est stable par u. En effet, si $x \in F$ et $\varphi \in P$, alors

$$\varphi(u(x)) = u^*(\varphi)(x) = 0,$$

car $u^*(\varphi) \in P$.

Le sous-espace F est de dimension $n-2$. On choisit une base

$$e_1, \dots, e_{n-2}$$

de F dans laquelle la matrice de $u_{|F}$ est triangulaire supérieure.

L'endomorphisme induit $\bar{u}$ sur $\mathbb{C}^n/F$ n'est pas une homothétie, car son dual s'identifie à $u^*_{|P}$. Comme $\mathbb{C}^n/F$ est de dimension 2, on peut choisir une base $(\bar{e}_{n-1}, \bar{e}_n)$ du quotient dans laquelle la matrice B de $\bar{u}$ vérifie
$$b_{2,1} \neq 0.$$

On relève cette base en des vecteurs e_{n-1}, e_n de $\mathbb{C}^n$.

Dans la base
$$(e_1, \dots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n),$$

la matrice de u est de la forme
$$\begin{pmatrix} C & (?) \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où C est triangulaire supérieure et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $b_{2,1} \neq 0$.

Cette matrice est bien presque triangulaire supérieure : toutes les entrées sous la diagonale sont nulles, sauf éventuellement l'entrée correspondant à $b_{2,1}$, c'est-à-dire l'entrée globale $(n, n-1)$, qui est non nulle.

Donc

$$\boxed{\text{toute matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Vect}(I_n) \text{ est semblable à une matrice presque triangulaire supérieure.}}$$

25. Toute trace nulle est somme de quatre carrés nuls

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\mathrm{tr}(u) = 0.$$

Si $\dim E \leq 1$, alors $u = 0$, et le résultat est immédiat.

Supposons donc $n = \dim E \geq 2$. On fixe une base de E et on note A la matrice de u.

Si A est une homothétie, alors $A = \lambda I_n$. Comme

$$\mathrm{tr}(A) = n\lambda = 0,$$

on a $\lambda = 0$, donc $A = 0$, qui est somme de quatre matrices de carré nul.

Supposons maintenant que A n'est pas une homothétie. D'après la question 24, A est semblable à une matrice presque triangulaire supérieure A_0. Comme la trace est invariante par similitude,

$$\mathrm{tr}(A_0) = 0.$$

D'après la question 19, il existe $C_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que

$$A_0 + V + E_{C_0}$$

soit semblable à J_n. Or J_n est somme de deux matrices de carré nul d'après la question 20. La propriété d'être somme de deux matrices de carré nul est stable par similitude, donc

$$A_0 + V + E_{C_0} \in \Sigma_2\mathcal{C}(\mathbb{C}^n).$$

D'autre part, d'après la question 21,

$$V + E_{C_0} \in \Sigma_2\mathcal{C}(\mathbb{C}^n).$$

Écrivons donc

$$A_0 + V + E_{C_0} = N_1 + N_2, \qquad V + E_{C_0} = M_1 + M_2,$$

avec

$$N_1^2 = N_2^2 = M_1^2 = M_2^2 = 0.$$

Alors

$$A_0 = N_1 + N_2 - M_1 - M_2.$$

Mais si $M_i^2 = 0$, alors $(-M_i)^2 = 0$. Donc A_0 est somme de quatre matrices de carré nul :

$$A_0 = N_1 + N_2 + (-M_1) + (-M_2).$$

Par similitude, il en va de même pour A, donc pour l'endomorphisme u.

Ainsi

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad \mathrm{tr}(u) = 0 \implies u \in \Sigma_4\mathcal{C}(E).}$$

Fin de la correction.