Mines-Ponts PC 2026 – Mathématiques II

Solutions périodiques d'équations différentielles

Corrigé détaillé

Partie 1 – Résultats généraux

Question 1.

On pose $\mathcal{B}(H) = \mathcal{S}(H) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

L'espace $\mathcal{S}(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: l'équation (EH) est linéaire homogène, donc la fonction nulle est solution, et toute combinaison linéaire de solutions reste solution. L'espace $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est aussi un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: la fonction nulle est bornée, et $\|\lambda f + \mu g\| \leq |\lambda| \, \|f\| + |\mu| \, \|g\|$.

L'intersection $\mathcal{B}(H)$ est donc un sous-espace vectoriel, et il est inclus dans $\mathcal{S}(H)$. Par conséquent, $\mathcal{B}(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(H)$.

Question 2.

Soit $f \in \mathcal{B}(E)$. On pose $g = f - f_0$. Alors :

$$g'' + b\,g = (f'' + b\,f) - (f_0'' + b\,f_0) = c - c = 0,$$

donc $g \in \mathcal{S}(H)$. De plus, g est bornée comme différence de deux fonctions bornées. Ainsi $g \in \mathcal{B}(H)$ et $f = f_0 + g$.

Réciproquement, soit $g \in \mathcal{B}(H)$ et posons $f = f_0 + g$. Par linéarité, $f'' + b\,f = c + 0 = c$, donc $f \in \mathcal{S}(E)$. La fonction f est bornée comme somme de deux fonctions bornées, donc $f \in \mathcal{B}(E)$.

On a bien montré : $\mathcal{B}(E) = f_0 + \mathcal{B}(H)$.

Question 3.

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. La fonction $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ par composition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f)'(x) = f'(x + 2\pi)$ et $T(f)''(x) = f''(x + 2\pi)$.

En utilisant la 2π-périodicité de b et c :

$$T(f)''(x) + b(x)\,T(f)(x) = f''(x + 2\pi) + b(x + 2\pi)\,f(x + 2\pi) = c(x + 2\pi) = c(x).$$

Donc $T(f)$ est solution de (E).

Question 4.

On pose $h(x) = T(f)(x) - f(x) = f(x + 2\pi) - f(x)$.

D'après la question 3, $T(f)$ est solution de (E) ; comme f l'est aussi, $h = T(f) - f$ est solution de (EH) par soustraction.

Les hypothèses donnent $h(0) = f(2\pi) - f(0) = 0$ et $h'(0) = f'(2\pi) - f'(0) = 0$.

L'équation (EH) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients continus sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire garantit l'unicité de la solution sur $\mathbb{R}$ pour des conditions initiales données en 0. La fonction nulle vérifie (EH) avec ces conditions initiales nulles, donc h est identiquement nulle.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = f(x)$: f est 2π-périodique.

Partie 2 – Un exemple à coefficients constants

Question 5.

Pour $f_0(x) = d\cos x$, on a $f_0''(x) = -d\cos x$, d'où :

$$f_0''(x) + \omega^2 f_0(x) = (-d + \omega^2 d)\cos x = d(\omega^2 - 1)\cos x.$$

Pour que f_0 soit solution de (E), on impose $d(\omega^2 - 1) = 1$, ce qui donne :

$$\boxed{d = \frac{1}{\omega^2 - 1}}$$

(cette valeur est bien définie car $\omega \neq 1$).

L'équation caractéristique de (EH) est $r^2 + \omega^2 = 0$, de racines $\pm i\omega$. Les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme $\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$.

On cherche $u(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$ avec $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$: on trouve $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

De même pour v : $v(0) = 0$ donne $\alpha = 0$ et $v'(0) = 1$ donne $\beta\omega = 1$, soit $\beta = 1/\omega$.

$$\boxed{u(x) = \cos(\omega x), \qquad v(x) = \frac{\sin(\omega x)}{\omega}}$$

Question 6.

D'après la question 2 et les questions précédentes :

$$\mathcal{S}(E) = \left\{ \frac{\cos x}{\omega^2 - 1} + A\cos(\omega x) + \frac{B}{\omega}\sin(\omega x),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Toute fonction de cette forme est combinaison linéaire de $\cos x$, $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega x)$, qui sont toutes bornées par 1. Toutes les solutions de (E) sont donc bornées :

$$\boxed{\mathcal{B}(E) = \mathcal{S}(E)}$$

Question 7.

Soit f une solution périodique de (E) de période $T > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$, donc en dérivant deux fois, $f''(x+T) = f''(x)$.

En écrivant (E) en $x + T$:

$$f''(x+T) + \omega^2 f(x+T) = c(x+T),$$

soit $f''(x) + \omega^2 f(x) = \cos(x+T)$. Comme f vérifie aussi $f''(x) + \omega^2 f(x) = \cos x$, on obtient :

$$\cos(x+T) = \cos x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Cela impose $T \in 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $T > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T = 2k\pi$.

Question 8.

Posons $T = 2k\pi$. La fonction f_0 est 2π-périodique, donc $f_0(x+T) = f_0(x)$ pour tout x. La périodicité $f(x+T) = f(x)$ se traduit par :

$$A\big[u(x+T) - u(x)\big] + B\big[v(x+T) - v(x)\big] = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Calculons :

$$\begin{aligned} u(x+T) - u(x) &= \cos(\omega x + 2k\pi\omega) - \cos(\omega x) \\ &= \cos(\omega x)\big[\cos(2k\pi\omega) - 1\big] - \sin(\omega x)\sin(2k\pi\omega). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x+T) - v(x) &= \frac{1}{\omega}\left[\sin(\omega x + 2k\pi\omega) - \sin(\omega x)\right] \\ &= \frac{1}{\omega}\Big[\sin(\omega x)\big(\cos(2k\pi\omega) - 1\big) + \cos(\omega x)\sin(2k\pi\omega)\Big]. \end{aligned}$$

En regroupant selon $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega x)$:

$$\begin{aligned} A[u(x+T)-u(x)]+B[v(x+T)-v(x)] = \cos(\omega x)&\Big[A(\cos(2k\pi\omega)-1) + \tfrac{B\sin(2k\pi\omega)}{\omega}\Big] \\ &+ \sin(\omega x)\Big[-A\sin(2k\pi\omega) + \tfrac{B(\cos(2k\pi\omega)-1)}{\omega}\Big]. \end{aligned}$$

Les fonctions $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega x)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ (puisque $\omega \neq 0$). L'égalité doit donc être vraie coefficient par coefficient :

$$\begin{cases} \big(\cos(2k\pi\omega) - 1\big)A + \dfrac{\sin(2k\pi\omega)}{\omega}B = 0, \\ -\omega\sin(2k\pi\omega)A + \big(\cos(2k\pi\omega) - 1\big)B = 0. \end{cases}$$

(la deuxième ligne s'obtient en multipliant par ω pour simplifier).

Question 9.

Le déterminant de M vaut :

$$\begin{aligned} \det M &= \big(\cos(2k\pi\omega) - 1\big)^2 - \frac{\sin(2k\pi\omega)}{\omega} \cdot \big(-\omega\sin(2k\pi\omega)\big) \\ &= \big(\cos(2k\pi\omega) - 1\big)^2 + \sin^2(2k\pi\omega) \\ &= \cos^2(2k\pi\omega) - 2\cos(2k\pi\omega) + 1 + \sin^2(2k\pi\omega) \\ &= 2 - 2\cos(2k\pi\omega) = 4\sin^2(k\pi\omega). \end{aligned}$$

Supposons $\omega \notin \mathbb{Q}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k\omega \notin \mathbb{Z}$, donc $k\pi\omega \notin \pi\mathbb{Z}$, donc $\sin(k\pi\omega) \neq 0$, donc $\det M \neq 0$.

Le système est alors de Cramer et admet pour unique solution $A = B = 0$. La solution périodique f vaut donc f_0. Ainsi f_0 est l'unique solution périodique de (E).

Question 10.

Supposons $\omega = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Posons $T = 2q\pi$.

- La fonction $f_0(x) = \cos x/(\omega^2 - 1)$ est 2π-périodique, donc T-périodique.
- Pour u et v, on vérifie : $\omega T = (p/q) \cdot 2q\pi = 2p\pi \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc $\cos(\omega(x+T)) = \cos(\omega x + 2p\pi) = \cos(\omega x)$ et de même pour sin.

Toute solution $f = f_0 + Au + Bv$ est donc T-périodique : $T = 2q\pi$ est une période commune à toutes les solutions de (E).

Partie 3 – Unicité lorsque b est négative

Question 11.

Soit g une solution de (EH) : $g'' = (1 + \cos x)g$.

La fonction g^2 est de classe $\mathcal{C}^2$, et :

$$(g^2)'' = (2gg')' = 2(g')^2 + 2gg'' = 2(g')^2 + 2(1 + \cos x)g^2.$$

Comme $1 + \cos x \geq 0$ et $g^2 \geq 0$, on a $(g^2)'' \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction g^2 est donc convexe.

Question 12.

Soit $g \in \mathcal{B}(H)$. La fonction g^2 est convexe (question 11) et bornée (puisque g l'est). Si g^2 n'était pas constante, le résultat admis affirmerait qu'elle n'est pas majorée, ce qui contredit le caractère borné. Donc g^2 est constante : il existe $c \geq 0$ tel que $g^2(x) = c$ pour tout x.

Si $c = 0$, g est identiquement nulle.

Si $c > 0$, la fonction g est continue, ne s'annule pas et vaut $\pm\sqrt{c}$; par continuité, g est constante, égale à $\sqrt{c}$ ou $-\sqrt{c}$. Alors $g'' = 0$ et l'équation (EH) donne $-(1 + \cos x)\, g(x) = 0$ pour tout x. Comme $g \neq 0$, il vient $1 + \cos x = 0$ pour tout x, ce qui est faux (par exemple en $x = 0$).

Le cas $c > 0$ est donc exclu, et $g = 0$. La fonction nulle est l'unique solution bornée de (EH).

Question 13.

Soient f_1, f_2 deux solutions bornées de (E). Leur différence $g = f_1 - f_2$ est solution de (EH) (linéarité) et bornée (différence de bornées), donc nulle d'après la question 12. Ainsi $f_1 = f_2$: (E) admet au plus une solution bornée.

Question 14.

Supposons que (E) admette une solution bornée f. La question 3 fournit une autre solution de (E), à savoir $T(f) : x \mapsto f(x + 2\pi)$. Cette fonction est bornée car f l'est, avec la même borne.

D'après la question 13, $T(f) = f$, c'est-à-dire $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est 2π-périodique.

Partie 4 – Existence d'une solution périodique

Question 15.

La relation de récurrence donne, pour tout $n \geq 2$:

$$(n^2 + 1)\, a_n = -\frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1}),$$

d'où, en majorant par la borne M :

$$(n^2 + 1)\, |a_n| \leq \frac{1}{2}\big(|a_{n+1}| + |a_{n-1}|\big) \leq M.$$

Ainsi, pour $n \geq 2$, $|a_n| \leq \dfrac{M}{n^2 + 1}$.

La majoration $|a_n| \leq M/(n^2 + 1)$ et la convergence de la série de Riemann $\sum 1/n^2$ entraînent par comparaison la convergence absolue de $\sum a_n$.

Pour la seconde série, écrivons à partir de la même relation :

$$n^2 a_n = -a_n - \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 2,$$

d'où :

$$|n^2 a_n| \leq |a_n| + \frac{1}{2}|a_{n-1}| + \frac{1}{2}|a_{n+1}|.$$

Les trois séries $\sum |a_n|$, $\sum |a_{n-1}|$ et $\sum |a_{n+1}|$ convergent (les deux dernières par décalage d'indice). Par comparaison, $\sum n^2 a_n$ converge absolument.

Question 16.

Régularité de g. Pour tout $n \geq 1$, on a $|a_n \sin(nx)| \leq |a_n|$ et $\sum |a_n|$ converge, donc la série $\sum a_n \sin(nx)$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. La fonction g est ainsi définie et continue sur $\mathbb{R}$.

L'inégalité $2n \leq 1 + n^2$ pour $n \geq 1$ donne $n|a_n| \leq \frac{|a_n| + n^2|a_n|}{2}$; donc $\sum n\,|a_n|$ converge absolument. La série dérivée terme à terme $\sum n\,a_n \cos(nx)$ converge alors normalement sur $\mathbb{R}$, et de même $\sum n^2 a_n \sin(nx)$ converge normalement.

Le théorème de dérivation terme à terme s'applique deux fois : g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n \cos(nx), \qquad g''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \sin(nx).$$

Calcul de $L(g) = g'' - (1 + \cos x)g$. On a :

$$g''(x) - g(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 1)\,a_n \sin(nx).$$

Pour $\cos(x)\,g(x)$, on utilise $\cos(x)\sin(nx) = \frac{1}{2}\big[\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\big]$; la convergence normale autorise l'échange somme–multiplication :

$$\cos(x)\,g(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \big[\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\big].$$

Le terme $\sin(0) = 0$ pour $n = 1$, donc :

$$\cos(x)\,g(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} \sin(nx) + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} a_{n+1} \sin(nx) + \frac{1}{2}a_2 \sin(x).$$

(Le terme isolé $\frac{1}{2}a_2 \sin x$ provient du décalage qui place a_2 en face de $\sin(1 \cdot x)$.)

On obtient ainsi, en regroupant :

$$g''(x) - (1 + \cos x)g(x) = -\left(2a_1 + \tfrac{a_2}{2}\right)\sin(x) - \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n^2+1)a_n + \tfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}\right]\sin(nx).$$

Identification. Pour $n \geq 2$, le coefficient entre crochets est nul d'après la relation $(n^2 + 1)a_n + \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1}) = 0$.

Pour le terme en $\sin(x)$: la relation $4a_1 + a_2 = -2$ donne $-(2a_1 + a_2/2) = -(4a_1 + a_2)/2 = 1$.

Conclusion : $g''(x) - (1 + \cos x)g(x) = \sin x$, c'est-à-dire g est solution de $y'' - (1 + \cos x)y = \sin x$.

Question 17.

La famille $(s_1, \dots, s_N)$ engendre $\mathcal{P}_N$ par définition. Montrons qu'elle est libre via un calcul d'orthogonalité.

Calcul préliminaire. Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n \neq m$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t)\big]\,dt = 0$$

(car les entiers $n-m$ et $n+m$ sont non nuls).

Pour $n = m \geq 1$: $\int_0^{2\pi} \sin^2(nt)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nt)}{2}\,dt = \pi$.

Liberté. Soit $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ tels que $\sum_{k=1}^N \beta_k s_k = 0$. Pour chaque $n \in \{1, \dots, N\}$, en multipliant par s_n et en intégrant sur $[0, 2\pi]$, l'orthogonalité donne :

$$\beta_n \int_0^{2\pi} s_n^2(t)\,dt = 0, \quad \text{soit} \quad \beta_n \pi = 0,$$

d'où $\beta_n = 0$.

La famille $(s_1, \dots, s_N)$ est donc libre, et c'est une base de $\mathcal{P}_N$.

Question 18.

Pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} L(s_n)(x) &= s_n''(x) - (1+\cos x)s_n(x) = -n^2\sin(nx) - (1+\cos x)\sin(nx) \\ &= -(n^2+1)\sin(nx) - \cos(x)\sin(nx) \\ &= -(n^2+1)s_n(x) - \frac{1}{2}\big[\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\big] \\ &= -(n^2+1)\,s_n - \frac{1}{2}\,s_{n+1} - \frac{1}{2}\,s_{n-1}. \end{aligned}$$

(avec la convention $s_0 = 0$ pour $n = 1$). On retient :

$$\boxed{L(s_n) = -(n^2+1)\,s_n - \tfrac{1}{2}\,s_{n+1} - \tfrac{1}{2}\,s_{n-1}}$$

Question 19.

***L* envoie $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.** L'application L est linéaire (somme de l'opérateur de dérivation seconde et de la multiplication par $-(1+\cos x)$). Pour tout $n \geq 1$, $L(s_n)$ est combinaison linéaire de s_{n-1}, s_n, s_{n+1} (avec $s_0 = 0$), donc $L(s_n) \in \mathcal{P}$. Par linéarité, $L(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$. Donc L est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

Injectivité. Soit $p \in \mathcal{P}$ tel que $L(p) = 0$. Alors p est solution de (EH) : $y'' - (1+\cos x)y = 0$. Comme $p \in \mathcal{P}$ est combinaison linéaire finie de fonctions $\sin(nx)$, p est bornée sur $\mathbb{R}$. La question 12 donne $p = 0$. L'endomorphisme L est donc injectif.

$s_1 \notin \mathrm{Im}(L)$. Par l'absurde, supposons l'existence de $p \in \mathcal{P}$ tel que $L(p) = s_1$. Comme $p \in \mathcal{P}$, il existe $N \geq 1$ tel que $p \in \mathcal{P}_N$: on écrit $p = \sum_{n=1}^N \beta_n s_n$ avec $\beta_N \neq 0$ (sinon on diminue N).

D'après la question 18, le coefficient de s_{N+1} dans $L(s_n)$ vaut $-1/2$ si $n = N$, et 0 si $n < N$. Donc le coefficient de s_{N+1} dans $L(p) = \sum \beta_n L(s_n)$ vaut $-\beta_N/2$.

Or, dans la base $(s_1, \dots, s_{N+1})$ de $\mathcal{P}_{N+1}$, l'élément s_1 a un coefficient nul devant s_{N+1} dès que $N \geq 1$. Comme $L(p) = s_1$, on doit avoir $-\beta_N/2 = 0$, soit $\beta_N = 0$: contradiction.

Donc $s_1 \notin \mathrm{Im}(L)$.

Question 20.

Soit $N \geq 1$.

Inclusion $L(\mathcal{P}_N) + \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_{N+1}$. Pour $n \in \{1, \dots, N\}$, $L(s_n)$ est combinaison de s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, qui sont dans $\mathcal{P}_{N+1}$ (car $n+1 \leq N+1$). Par linéarité, $L(\mathcal{P}_N) \subset \mathcal{P}_{N+1}$. Et $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_{N+1}$.

La somme est directe. Soit $f \in L(\mathcal{P}_N) \cap \mathcal{P}_1$: $f = L(p)$ pour un certain $p \in \mathcal{P}_N$, et $f = \alpha s_1$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \neq 0$, alors $s_1 = L(p/\alpha) \in \operatorname{Im}(L)$, ce qui contredit la question 19. Donc $\alpha = 0$ et $f = 0$.

Égalité par dimensions. L'endomorphisme L est injectif sur $\mathcal{P}_N$, donc $\dim L(\mathcal{P}_N) = \dim \mathcal{P}_N = N$ (la famille $(s_1, \dots, s_N)$ étant une base de $\mathcal{P}_N$ d'après la question 17). Comme la somme est directe :

$$\dim\big(L(\mathcal{P}_N) \oplus \mathcal{P}_1\big) = N + 1 = \dim \mathcal{P}_{N+1}.$$

L'inclusion $L(\mathcal{P}_N) \oplus \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_{N+1}$ et l'égalité des dimensions donnent finalement $L(\mathcal{P}_N) \oplus \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{N+1}$.

Question 21.

Soit $c \in \mathcal{P}$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $c \in \mathcal{P}_N$, donc $c \in \mathcal{P}_{N+1}$.

D'après la question 20, $\mathcal{P}_{N+1} = L(\mathcal{P}_N) \oplus \mathcal{P}_1$. On peut donc écrire $c = L(p) + \alpha s_1$ avec $p \in \mathcal{P}_N$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

D'après la question 16, la fonction g est solution de $L(g) = s_1$. Posons $f = p + \alpha g$: par linéarité,

$$L(f) = L(p) + \alpha L(g) = L(p) + \alpha s_1 = c.$$

Donc f est solution de (E).

La fonction p, combinaison linéaire finie de sinus de pulsations entières, est 2π-périodique. La fonction g est aussi 2π-périodique : elle est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite des sommes partielles $g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(nx)$, qui sont toutes 2π-périodiques, donc g l'est aussi. Ainsi $f = p + \alpha g$ est 2π-périodique, et bornée (somme de bornées).

L'équation (E) admet bien une solution périodique.

Partie 5 – Un théorème général

Question 22.

Construction de $\mathcal{H}$. Posons $\mathcal{H} = \operatorname{Vect}(f_0) + \mathcal{B}(H)$.

L'espace $\mathcal{B}(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(H)$ (question 1). Or $\mathcal{S}(H)$ est de dimension 2 (théorème de structure des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients continus), donc $\mathcal{B}(H)$ est de dimension ≤ 2. Avec la droite $\operatorname{Vect}(f_0)$: $\dim \mathcal{H} \leq 3$.

L'espace $\mathcal{H}$ est inclus dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: f_0 est bornée par hypothèse, et $\mathcal{B}(H) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$. Si $f \in \mathcal{A}$, alors $f \in \mathcal{B}(E) = f_0 + \mathcal{B}(H)$ (question 2), donc $f = f_0 + g$ avec $g \in \mathcal{B}(H)$, et $f \in \mathcal{H}$.

$\mathcal{A}$ non vide. On a $f_0 \in \mathcal{B}(E)$ et $\|f_0\| = M_0$, donc $f_0 \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ bornée. Par définition même : $\mathcal{A} \subset \{f \in \mathcal{H}, \|f\| \leq M_0\}$, qui est borné.

$\mathcal{A}$ fermée dans $\mathcal{H}$. Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ qui converge vers f dans $\mathcal{H}$. L'espace $\mathcal{H}$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes, et on peut le munir de la norme infinie : $f_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

Pour tout n, $\|f_n\| \leq M_0$, donc à la limite $\|f\| \leq M_0$.

Reste à voir que $f \in \mathcal{B}(E)$. On écrit $f_n = f_0 + g_n$ avec $g_n \in \mathcal{B}(H)$; alors $g_n \to f - f_0$ uniformément. Or $\mathcal{B}(H) \subset \mathcal{S}(H)$ qui est de dimension ≤ 2, et tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé. Donc $f - f_0 \in \mathcal{B}(H)$, et $f = f_0 + (f - f_0) \in \mathcal{B}(E)$. Avec $\|f\| \leq M_0$, on conclut $f \in \mathcal{A}$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ est donc fermé borné non vide de $\mathcal{H}$.

Question 23.

L'ensemble $\mathcal{I}$ est non vide ($\mathcal{A}$ l'est) et minoré par 0 (somme de valeurs absolues). Donc $\alpha = \inf \mathcal{I}$ existe dans $\mathbb{R}_+$.

Atteinte de l'infimum. Considérons l'application

$$\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto |f(2\pi) - f(0)| + |f'(2\pi) - f'(0)|.$$

Les applications $f \mapsto f(0)$, $f \mapsto f(2\pi)$, $f \mapsto f'(0)$, $f \mapsto f'(2\pi)$ sont des formes linéaires sur $\mathcal{H}$, donc continues (car $\mathcal{H}$ est de dimension finie). Par composition avec la valeur absolue et somme, φ est continue sur $\mathcal{H}$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ est fermé borné dans $\mathcal{H}$ qui est de dimension finie, donc $\mathcal{A}$ est compact (théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension finie). L'application continue φ atteint son minimum sur le compact $\mathcal{A}$: il existe $f_1 \in \mathcal{A}$ tel que

$$\varphi(f_1) = \alpha = |f_1(2\pi) - f_1(0)| + |f_1'(2\pi) - f_1'(0)|.$$

Question 24.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction g_n est définie par $g_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k(f_0)$.

g_n est solution de (E). Pour chaque $k \geq 0$, $T^k(f_0)$ est solution de (E) (récurrence à partir de la question 3). En sommant l'équation pour $k = 0, \ldots, n$ et en divisant par $n+1$:

$$g_n''(x) + b(x)\, g_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} c(x) = c(x).$$

$g_n \in \mathcal{A}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|T^k(f_0)(x)| \leq \|f_0\| = M_0$, donc :

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} M_0 = M_0,$$

donc g_n est bornée avec $\|g_n\| \leq M_0$. Comme $g_n \in \mathcal{B}(E)$, on a $g_n \in \mathcal{A}$.

Calcul des différences en 0 et 2π. En écrivant la moyenne :

$$g_n(x) = \frac{1}{n+1}\big(f_0(x) + f_0(x + 2\pi) + \ldots + f_0(x + 2n\pi)\big),$$

on obtient :

$$g_n(2\pi) = \frac{1}{n+1}\big(f_0(2\pi) + f_0(4\pi) + \ldots + f_0(2(n+1)\pi)\big),$$

$$g_n(0) = \frac{1}{n+1}\big(f_0(0) + f_0(2\pi) + \ldots + f_0(2n\pi)\big).$$

Par téléscopage :

$$g_n(2\pi) - g_n(0) = \frac{1}{n+1}\big(f_0(2(n+1)\pi) - f_0(0)\big),$$

d'où $|g_n(2\pi) - g_n(0)| \leq \dfrac{2M_0}{n+1}$.

Le calcul est identique pour g_n' (qui est la moyenne des $T^k(f_0')$) :

$$|g_n'(2\pi) - g_n'(0)| \leq \frac{2M_1}{n+1}.$$

Conclusion. Comme $g_n \in \mathcal{A}$, $\alpha \leq \varphi(g_n)$, donc :

$$\alpha \leq |g_n(2\pi) - g_n(0)| + |g_n'(2\pi) - g_n'(0)| \leq \frac{2M_0}{n+1} + \frac{2M_1}{n+1} = \frac{2(M_0+M_1)}{n+1}.$$

Question 25.

D'après la question 24, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha \leq \dfrac{2(M_0+M_1)}{n+1}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\alpha = 0$.

D'après la question 23, il existe $f_1 \in \mathcal{A}$ tel que $\varphi(f_1) = \alpha = 0$. Comme la somme de deux valeurs absolues est nulle si et seulement si chacune l'est :

$$f_1(2\pi) = f_1(0) \quad \text{et} \quad f_1'(2\pi) = f_1'(0).$$

La fonction f_1 est solution de (E) (puisque $f_1 \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}(E)$). La question 4 donne alors la 2π-périodicité de f_1.

L'équation (E) admet donc la solution périodique f_1, ce qui démontre le théorème énoncé en début de Partie 5.

Fin du corrigé