

EXCELLENCE MATHS

---

# Correction détaillée

Mathématiques I – PSI 2026  
Sommes d'endomorphismes de carré nul

---

---

*Correction rédigée dans un style concours : les arguments de réduction, de rang, de trace et de similitude sont explicités afin de rendre l'enchaînement des cinq parties.*

---

[www.excellence-maths.fr](http://www.excellence-maths.fr)

*Excellence Maths – Coaching en Mathématiques*

## Table des matières

1	Partie A – Réduction des endomorphismes de carré nul	2
2	Partie B – Somme d'un nombre arbitraire d'endomorphismes de carré nul	4
3	Partie C – Somme de trois endomorphismes de carré nul	6
4	Partie D – Intermède : matrices de Hessenberg	8
5	Partie E – Somme de quatre endomorphismes de carré nul	11

## 1 Partie A – Réduction des endomorphismes de carré nul

On fixe un espace vectoriel complexe  $E$  de dimension  $n > 0$ , et un endomorphisme non nul  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2 = 0$ . On note  $r = \text{rg}(u)$ .

### Question 1

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  et soit  $x \neq 0$  un vecteur propre associé. Alors

$$u(x) = \lambda x.$$

En appliquant  $u$  une seconde fois, on obtient

$$0 = u^2(x) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x.$$

Comme  $x \neq 0$ , on a nécessairement  $\lambda^2 = 0$ , donc  $\lambda = 0$ .

Ainsi, la seule valeur propre possible de  $u$  est 0. Comme le corps de base est  $\mathbb{C}$ , le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé, et la trace est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité algébrique. On en déduit

$$\text{tr}(u) = 0.$$

---

*Tout endomorphisme de carré nul est nilpotent, donc de trace nulle.*

---

### Question 2

Pour tout  $x \in E$ , on a

$$u(u(x)) = u^2(x) = 0.$$

Donc  $u(x) \in \text{Ker}(u)$ , ce qui donne l'inclusion

$$\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u).$$

Par conséquent,

$$\text{rg}(u) = \dim \text{Im}(u) \leq \dim \text{Ker}(u).$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(u) = n - \text{rg}(u) = n - r.$$

Ainsi

$$r \leq n - r,$$

d'où

$$\boxed{r \leq \frac{n}{2}}.$$

### Question 3

On sait que  $\dim \text{Ker}(u) = n - r$ . On choisit un supplémentaire  $F$  de  $\text{Ker}(u)$  dans  $E$  :

$$E = \text{Ker}(u) \oplus F.$$

Alors

$$\dim F = n - \dim \text{Ker}(u) = n - (n - r) = r.$$

Soit  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $F$ . C'est une famille libre et elle vérifie

$$E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Vect}(e_1, \dots, e_r).$$

Montrons que  $(u(e_1), \dots, u(e_r))$  est libre. Supposons

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i u(e_i) = 0.$$

Par linéarité,

$$u\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i\right) = 0.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i \in \text{Ker}(u).$$

Mais ce vecteur appartient aussi à  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ , donc il appartient à

$$F \cap \text{Ker}(u) = \{0\}.$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i = 0.$$

Comme  $(e_1, \dots, e_r)$  est libre, on obtient  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ . Donc  $(u(e_1), \dots, u(e_r))$  est libre.

#### Question 4

Posons

$$f_i = u(e_i) \quad (1 \leq i \leq r).$$

D'après la question précédente,  $(f_1, \dots, f_r)$  est une famille libre. De plus  $f_i \in \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ .

On complète cette famille libre de  $\text{Ker}(u)$  en une base de  $\text{Ker}(u)$  :

$$(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_{n-2r}).$$

C'est possible car

$$\dim \text{Ker}(u) = n - r,$$

et il faut donc ajouter  $n - r - r = n - 2r$  vecteurs.

Alors la famille

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_{n-2r})$$

est une base de  $E$ , puisque

$$E = F \oplus \text{Ker}(u).$$

Dans cette base :

$$u(e_i) = f_i, \quad u(f_i) = u^2(e_i) = 0, \quad u(g_j) = 0.$$

La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est donc

$$\begin{pmatrix} 0_r & 0_r & (0) \\ I_r & 0_r & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2r} \end{pmatrix}.$$

### Question 5

La question précédente prouve l'existence d'une telle écriture avec  $m = r$ .

Réciproquement, si  $u$  est représenté dans une base par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0_m & 0_m & (0) \\ I_m & 0_m & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2m} \end{pmatrix},$$

alors le rang de cette matrice est exactement  $m$ , car seules les  $m$  premières colonnes sont non nulles et elles sont indépendantes.

Ainsi, nécessairement

$$m = \text{rg}(u) = r.$$

Comme  $u \neq 0$ , on a  $r > 0$ . Il existe donc un unique entier  $m > 0$ , à savoir

$$\boxed{m = r = \text{rg}(u)}.$$

## 2 Partie B – Somme d'un nombre arbitraire d'endomorphismes de carré nul

On fixe  $n \geq 2$ . On note

$$\mathcal{H}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \text{tr}(A) = 0\}.$$

Pour  $i \neq j$ , on pose

$$F_{i,j} = E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} - E_{j,i}.$$

### Question 6

On rappelle que

$$E_{a,b}E_{c,d} = \delta_{b,c}E_{a,d}.$$

En particulier,

$$E_{i,j}^2 = \delta_{j,i}E_{i,j}.$$

Donc  $E_{i,j}^2 = 0$  si et seulement si  $i \neq j$ .

Ainsi, parmi les matrices  $E_{i,j}$ , celles qui sont de carré nul sont exactement les matrices

$$\boxed{E_{i,j} \text{ avec } i \neq j}.$$

Calculons ensuite  $F_{i,j}^2$  pour  $i \neq j$ . Sur le plan engendré par les vecteurs de base  $e_i, e_j$ , la matrice de  $F_{i,j}$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Or

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sur les autres vecteurs de base,  $F_{i,j}$  agit trivialement. Donc

$$\boxed{F_{i,j}^2 = 0 \quad (i \neq j)}.$$

**Question 7**

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{H}_n$ . On décompose  $A$  en sa partie diagonale et sa partie hors diagonale :

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} a_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^n a_{i,i} E_{i,i}.$$

La première somme est déjà combinaison linéaire de matrices  $E_{i,j}$  avec  $i \neq j$ .

Comme  $A \in \mathcal{H}_n$ , on a

$$\sum_{i=1}^n a_{i,i} = 0,$$

donc

$$a_{n,n} = - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i}.$$

La partie diagonale vaut alors

$$\sum_{i=1}^n a_{i,i} E_{i,i} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i} (E_{i,i} - E_{n,n}).$$

Or, pour  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$F_{i,n} = E_{i,i} - E_{n,n} + E_{i,n} - E_{n,i},$$

d'où

$$E_{i,i} - E_{n,n} = F_{i,n} - E_{i,n} + E_{n,i}.$$

Ainsi chaque  $E_{i,i} - E_{n,n}$  est combinaison linéaire de  $F_{i,n}$  et de matrices  $E_{p,q}$  avec  $p \neq q$ .

Donc tout élément de  $\mathcal{H}_n$  est combinaison linéaire de matrices de l'une des formes suivantes :

$$\boxed{E_{i,j} \ (i \neq j), \quad F_{i,n} \ (1 \leq i \leq n-1).}$$

**Question 8**

D'abord, toute matrice de carré nul est de trace nulle d'après la partie A. Donc toute somme de matrices de carré nul est de trace nulle, ce qui donne

$$\Sigma_{\infty} \mathcal{C}(\mathbb{C}^n) \subset \mathcal{H}_n.$$

Réciproquement, d'après les questions 6 et 7,  $\mathcal{H}_n$  est engendré par des matrices de carré nul. De plus, si  $N^2 = 0$ , alors pour tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$(\lambda N)^2 = \lambda^2 N^2 = 0.$$

Ainsi toute combinaison linéaire finie de ces matrices est une somme finie de matrices de carré nul. Donc

$$\mathcal{H}_n \subset \Sigma_{\infty} \mathcal{C}(\mathbb{C}^n).$$

On conclut

$$\boxed{\Sigma_{\infty} \mathcal{C}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \text{tr}(u) = 0\}.}$$

La formulation est indépendante de la base choisie, car la trace est invariante par changement de base.

### 3 Partie C – Somme de trois endomorphismes de carré nul

On suppose ici  $\dim E = n \geq 5$ . On admet le théorème de Wang et Wu :

$$w \in \Sigma_2 \mathcal{C}(E) \iff \exists \varphi \in \text{GL}(E), -w = \varphi \circ w \circ \varphi^{-1}.$$

On considère un endomorphisme  $u$  de trace nulle, tel que 1 soit valeur propre de  $u$  et tel que

$$d = \dim \text{Ker}(u - \text{Id}_E) > \frac{3n}{4}.$$

#### Question 9

Un exemple explicite convient. Dans une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ , définissons  $u$  par

$$u(e_i) = e_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad u(e_n) = -(n-1)e_n.$$

Alors la matrice de  $u$  est

$$\text{diag}(1, \dots, 1, -(n-1)).$$

Sa trace vaut

$$(n-1) \cdot 1 - (n-1) = 0.$$

De plus,

$$\text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}),$$

donc

$$d = n - 1.$$

Comme  $n \geq 5$ ,

$$n - 1 > \frac{3n}{4}.$$

Ainsi il existe bien un endomorphisme satisfaisant les contraintes imposées.

#### Question 10

On pose

$$w = u - \text{Id}_E,$$

et on fixe  $v \in \mathcal{C}(E)$ , donc  $v^2 = 0$ .

Comme

$$\text{Ker}(w) = \text{Ker}(u - \text{Id}_E),$$

on a

$$\dim \text{Ker}(w) = d > \frac{3n}{4}.$$

Le théorème du rang donne donc

$$\text{rg}(w) = n - d < \frac{n}{4}.$$

On développe

$$(w - v)^2 = w^2 - wv - vw + v^2 = w^2 - wv - vw.$$

On l'écrit sous la forme plus utile

$$(w - v)^2 = w(w - v) - vw.$$

Donc

$$\text{Im}((w - v)^2) \subset \text{Im}(w) + \text{Im}(vw).$$

Ainsi

$$\operatorname{rg}((w-v)^2) \leq \operatorname{rg}(w) + \operatorname{rg}(vw) \leq \operatorname{rg}(w) + \operatorname{rg}(w) = 2 \operatorname{rg}(w).$$

Comme  $\operatorname{rg}(w) < n/4$ , on obtient

$$\operatorname{rg}((w-v)^2) < \frac{n}{2}.$$

### Question 11

Posons

$$T = w - v.$$

Alors

$$\operatorname{Ker}(T^2)$$

est stable par  $T$ , car si  $x \in \operatorname{Ker}(T^2)$ , alors

$$T^2(Tx) = T(T^2x) = 0.$$

Sur le sous-espace  $K = \operatorname{Ker}(T^2)$ , l'endomorphisme induit par  $T$  vérifie

$$(T|_K)^2 = 0.$$

Ainsi  $T|_K$  est nilpotent, donc sa seule valeur propre est 0.

Or

$$u - v = (w + \operatorname{Id}_E) - v = \operatorname{Id}_E + T.$$

Donc sur  $K$ , l'endomorphisme  $(u-v)|_K$  a pour seule valeur propre 1. Par conséquent, la multiplicité algébrique de 1 comme valeur propre de  $u-v$  est au moins

$$\dim K = n - \operatorname{rg}(T^2) = n - \operatorname{rg}((w-v)^2).$$

D'après la question précédente,

$$\dim K > \frac{n}{2}.$$

Donc

$$1 \text{ est valeur propre de } u-v \text{ de multiplicité } > \frac{n}{2}.$$

### Question 12

Supposons qu'il existe  $\varphi \in \operatorname{GL}(E)$  tel que

$$-(u-v) = \varphi \circ (u-v) \circ \varphi^{-1}.$$

Alors  $u-v$  et  $-(u-v)$  sont semblables. Ils ont donc le même polynôme caractéristique.

D'après la question précédente, la multiplicité algébrique de 1 comme valeur propre de  $u-v$  est strictement supérieure à  $n/2$ .

Comme  $u-v$  est semblable à  $-(u-v)$ , la multiplicité de 1 pour  $-(u-v)$  est la même que celle de 1 pour  $u-v$ . Or 1 est valeur propre de  $-(u-v)$  si et seulement si  $-1$  est valeur propre de  $u-v$ , avec la même multiplicité algébrique.

Ainsi

$$1 \text{ et } -1 \text{ sont valeurs propres de } u-v \text{ de multiplicités } > \frac{n}{2}.$$

**Question 13**

Supposons par l'absurde que

$$u \in \Sigma_3\mathcal{C}(E).$$

Alors il existe  $a, b, v \in \mathcal{C}(E)$  tels que

$$u = a + b + v.$$

Donc

$$u - v = a + b \in \Sigma_2\mathcal{C}(E).$$

D'après le théorème de Wang et Wu, il existe  $\varphi \in \text{GL}(E)$  tel que

$$-(u - v) = \varphi \circ (u - v) \circ \varphi^{-1}.$$

La question 12 implique alors que  $u - v$  possède deux valeurs propres distinctes, 1 et  $-1$ , chacune de multiplicité algébrique strictement supérieure à  $n/2$ .

C'est impossible, car la somme des multiplicités algébriques des valeurs propres d'un endomorphisme de dimension  $n$  ne peut pas dépasser  $n$ .

Donc

$$\boxed{u \notin \Sigma_3\mathcal{C}(E).}$$

**4 Partie D – Intermède : matrices de Hessenberg**

On fixe  $n \geq 2$ . Une matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de Hessenberg lorsque

$$i > j + 1 \implies a_{i,j} = 0,$$

et elle est régulière lorsque

$$a_{i+1,i} \neq 0 \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

Pour  $C = (c_1, \dots, c_{n-1})^T \in \mathbb{C}^{n-1}$ , on note

$$E_C = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & C \\ (0) & 0 \end{pmatrix}.$$

**Question 14**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice de Hessenberg régulière, et posons

$$M(x) = xI_n - A.$$

On considère la sous-matrice  $M(x)^{(k,n)}$  obtenue en supprimant la ligne  $k$  et la colonne  $n$ .

Dans  $M(x)^{(k,n)}$ , séparons :

- les lignes  $1, \dots, k-1$  puis  $k+1, \dots, n$  ;
- les colonnes  $1, \dots, k-1$  puis  $k, \dots, n-1$ .

La condition de Hessenberg donne alors une écriture par blocs

$$M(x)^{(k,n)} = \begin{pmatrix} B_k(x) & * \\ 0 & T_k \end{pmatrix},$$

où  $B_k(x)$  est la sous-matrice principale d'ordre  $k-1$  de  $xI_n - A$ , et où  $T_k$  est triangulaire supérieure de diagonale

$$-a_{k+1,k}, -a_{k+2,k+1}, \dots, -a_{n,n-1}.$$

Les blocs vides sont naturellement ignorés lorsque  $k = 1$  ou  $k = n$ .

Ainsi

$$\det(M(x)^{(k,n)}) = \det(B_k(x)) \det(T_k).$$

Or  $\det(B_k(x))$  est un polynôme unitaire de degré  $k - 1$ , et

$$\det(T_k) = (-1)^{n-k} \prod_{i=k}^{n-1} a_{i+1,i}.$$

Comme la matrice est régulière, ce produit est non nul.

On obtient donc un unique polynôme  $P_k \in \mathbb{C}[X]$ , de degré  $k - 1$ , tel que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad \det((xI_n - A)^{(k,n)}) = P_k(x).$$

Son coefficient dominant est

$$\boxed{(-1)^{n-k} \prod_{i=k}^{n-1} a_{i+1,i}}$$

avec la convention qu'un produit vide vaut 1.

### Question 15

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme unitaire de degré  $n$  dont le coefficient devant  $X^{n-1}$  est  $-\operatorname{tr}(A)$ .

Notons

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A).$$

Le polynôme caractéristique  $\chi_A$  est unitaire de degré  $n$  et son coefficient devant  $X^{n-1}$  est aussi  $-\operatorname{tr}(A)$ .  
Donc

$$P - \chi_A \in \mathbb{C}_{n-2}[X].$$

Écrivons  $C = (c_1, \dots, c_{n-1})^T$ . La matrice  $E_C$  ne modifie que les  $n - 1$  premières entrées de la dernière colonne. Par multilinéarité du déterminant par rapport à cette dernière colonne,

$$\chi_{A+E_C}(X) = \chi_A(X) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k (-1)^{k+n} \det((XI_n - A)^{(k,n)}).$$

Avec les notations de la question précédente,

$$\chi_{A+E_C} = \chi_A - \sum_{k=1}^{n-1} c_k (-1)^{k+n} P_k.$$

Les polynômes  $P_1, \dots, P_{n-1}$  ont respectivement les degrés

$$0, 1, \dots, n - 2,$$

et chacun a un coefficient dominant non nul. Ils forment donc une base de  $\mathbb{C}_{n-2}[X]$ .

Il existe donc un unique choix de  $(c_1, \dots, c_{n-1})$  tel que

$$P - \chi_A = - \sum_{k=1}^{n-1} c_k (-1)^{k+n} P_k.$$

Autrement dit, il existe un unique vecteur  $C \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que  $A + E_C$  ait  $P$  pour polynôme caractéristique.

*La dernière colonne permet de régler librement tous les coefficients du polynôme caractéristique sauf les deux premiers, imposés par le caractère unitaire et par la trace.*

**Question 16**

La matrice  $J_n$  est nilpotente : en effet,  $J_n^n = 0$ . Son polynôme caractéristique est donc

$$\chi_{J_n}(X) = X^n.$$

Par ailleurs  $J_n$  est une matrice de Hessenberg régulière et  $\text{tr}(J_n) = 0$ .

Le vecteur  $C = 0$  convient donc pour que  $J_n + E_C$  ait  $X^n$  comme polynôme caractéristique. Par l'unicité de la question 15, c'est le seul.

Ainsi

$$C = (0, \dots, 0)^T.$$

**Question 17**

Soit  $A = (a_{i,j})$  la matrice de  $u$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ , avec  $A$  de Hessenberg régulière.

La condition de Hessenberg signifie que

$$u(e_j) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{j+1})$$

pour tout  $1 \leq j \leq n-1$ , et la régularité signifie que le coefficient de  $e_{j+1}$  dans  $u(e_j)$  vaut  $a_{j+1,j} \neq 0$ .

On montre par récurrence que, pour  $0 \leq k \leq n-1$ ,

$$u^k(e_1) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$$

et que le coefficient de  $e_{k+1}$  dans  $u^k(e_1)$  vaut

$$\prod_{i=1}^k a_{i+1,i},$$

qui est non nul.

La matrice de la famille

$$(e_1, u(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1))$$

dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est donc triangulaire supérieure, avec diagonale

$$1, a_{2,1}, a_{2,1}a_{3,2}, \dots, \prod_{i=1}^{n-1} a_{i+1,i}.$$

Tous ces coefficients sont non nuls. Le déterminant de cette matrice est donc non nul.

Ainsi

$$(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq n-1} \text{ est une base de } E.$$

**Question 18**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice de Hessenberg régulière dont le polynôme caractéristique est  $X^n$ . On note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

D'après la question 17,

$$\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1))$$

est une base de  $\mathbb{C}^n$ .

Par le théorème de Cayley-Hamilton,

$$A^n = 0,$$

donc

$$u^n(e_1) = 0.$$

Dans la base  $\mathcal{B}$ , on a donc

$$u(e_1) = u(e_1), \quad u(u(e_1)) = u^2(e_1), \quad \dots, \quad u(u^{n-2}(e_1)) = u^{n-1}(e_1), \quad u(u^{n-1}(e_1)) = 0.$$

La matrice de  $u$  dans cette base est exactement

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & (0) & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boxed{A \text{ est semblable à } J_n.}$$

## 5 Partie E – Somme de quatre endomorphismes de carré nul

On conserve les notations de la partie D. On note

$$V = (\delta_{i,j+1} \mathbf{1}_{i \neq n})_{1 \leq i, j \leq n},$$

c'est-à-dire la matrice obtenue à partir de  $J_n$  en annulant la dernière ligne.

### Question 19

Soit  $A$  une matrice presque triangulaire supérieure, avec

$$\operatorname{tr}(A) = 0.$$

Alors  $A + V$  est une matrice de Hessenberg régulière.

En effet :

- pour  $1 \leq i \leq n - 2$ , l'entrée en position  $(i + 1, i)$  de  $A + V$  vaut 1, car  $V$  possède les mêmes entrées sous-diagonales que  $J_n$  sauf sur la dernière ligne ;
- l'entrée en position  $(n, n - 1)$  vaut  $a_{n,n-1}$ , qui est non nulle par définition d'une matrice presque triangulaire supérieure.

De plus,

$$\operatorname{tr}(A + V) = \operatorname{tr}(A) = 0.$$

On applique la question 15 à la matrice de Hessenberg régulière  $A + V$  et au polynôme

$$P(X) = X^n.$$

Ce polynôme est unitaire de degré  $n$  et son coefficient devant  $X^{n-1}$  est  $0 = -\operatorname{tr}(A + V)$ .

Il existe donc  $C_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que

$$A + V + E_{C_0}$$

ait pour polynôme caractéristique  $X^n$ .

La matrice  $A + V + E_{C_0}$  est encore de Hessenberg régulière. Par la question 18, elle est semblable à  $J_n$ .

Ainsi

$$\boxed{\exists C_0 \in \mathbb{C}^{n-1} \text{ tel que } A + V + E_{C_0} \sim J_n.}$$

**Question 20**

Posons

$$B_1 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ i \text{ impair}}} E_{i+1,i}, \quad B_2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ i \text{ pair}}} E_{i+1,i}.$$

Alors

$$J_n = B_1 + B_2.$$

Montrons que  $B_1^2 = 0$ . Un produit de deux termes de  $B_1$  est non nul seulement si

$$E_{i+1,i} E_{j+1,j} \neq 0,$$

ce qui impose  $i = j + 1$ . Or deux entiers impairs ne peuvent pas différer de 1. Donc tous les produits sont nuls, et  $B_1^2 = 0$ .

Le même raisonnement, avec les indices pairs, donne  $B_2^2 = 0$ .

Ainsi

$$J_n \in \Sigma_2 \mathcal{C}(\mathbb{C}^n).$$

**Question 21**

Soit

$$C = (c_1, \dots, c_{n-1})^T \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

On définit

$$B_1 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-2 \\ i \text{ impair}}} E_{i+1,i} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ i \text{ pair}}} c_i E_{i,n},$$

et

$$B_2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-2 \\ i \text{ pair}}} E_{i+1,i} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ i \text{ impair}}} c_i E_{i,n}.$$

Alors, par construction,

$$B_1 + B_2 = V + E_C.$$

Vérifions que  $B_1^2 = 0$ . Les produits possibles sont de quatre types :

- deux termes sous-diagonaux : impossible d'obtenir un produit non nul, car les indices sous-diagonaux choisis dans  $B_1$  sont impairs et donc jamais consécutifs ;
- deux termes de la forme  $E_{i,n}$  : leur produit est nul car  $i \leq n - 1$  ;
- un terme  $E_{i,n}$  suivi d'un terme sous-diagonal  $E_{j+1,j}$  : le produit est nul car il faudrait  $n = j + 1$ , alors que  $j \leq n - 2$  ;
- un terme sous-diagonal  $E_{j+1,j}$  suivi d'un terme  $E_{i,n}$  : le produit serait non nul seulement si  $j = i$ , mais dans  $B_1$ ,  $j$  est impair tandis que  $i$  est pair.

Donc  $B_1^2 = 0$ . Le même raisonnement, en échangeant les parités, donne  $B_2^2 = 0$ .

Ainsi

$$V + E_C = B_1 + B_2 \quad \text{avec} \quad B_1^2 = B_2^2 = 0.$$

**Question 22**

Soit  $v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  qui n'est pas une homothétie.

On distingue deux cas.

**Premier cas :  $v$  possède deux valeurs propres distinctes.** Soient  $\lambda \neq \mu$  deux valeurs propres de  $v$ , et soient  $x, y$  des vecteurs propres associés non nuls. Alors

$$P = \text{Vect}(x, y)$$

est un plan stable par  $v$ . Le vecteur  $x + y$  n'est pas vecteur propre de  $v$  : sinon, on aurait

$$\lambda x + \mu y = \nu(x + y)$$

pour un certain  $\nu$ , donc par liberté de  $(x, y)$ ,

$$\lambda = \nu = \mu,$$

contradiction.

**Second cas :  $v$  possède une seule valeur propre  $\lambda$ .** Comme  $v$  n'est pas l'homothétie  $\lambda \text{Id}$ , l'endomorphisme

$$N = v - \lambda \text{Id}$$

est non nul. Il est nilpotent, car il est triangularisable sur  $\mathbb{C}$  et sa seule valeur propre est 0.

Soit  $p \geq 2$  l'indice de nilpotence de  $N$ , c'est-à-dire

$$N^p = 0 \quad \text{et} \quad N^{p-1} \neq 0.$$

On choisit  $x$  tel que  $N^{p-1}x \neq 0$ , puis on pose

$$y = N^{p-2}x.$$

Alors

$$Ny \neq 0 \quad \text{et} \quad N^2y = 0.$$

Le plan

$$P = \text{Vect}(y, Ny)$$

est stable par  $N$ , donc aussi par  $v = \lambda \text{Id} + N$ . De plus  $y$  n'est pas vecteur propre de  $v$ , puisque

$$v(y) = \lambda y + Ny$$

et  $Ny \neq 0$ .

Dans tous les cas, il existe donc un plan vectoriel de  $\mathbb{C}^n$  stable par  $v$  et contenant un vecteur non nul qui n'est pas vecteur propre de  $v$ .

**Question 23**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \text{Vect}(I_n)$ , et soit  $v$  l'endomorphisme associé. D'après la question précédente, il existe un plan  $P$  stable par  $v$  contenant un vecteur non nul  $e_1$  qui n'est pas vecteur propre de  $v$ .

On complète  $e_1$  en une base  $(e_1, e_2)$  de  $P$ . Comme  $e_1$  n'est pas vecteur propre, l'écriture

$$v(e_1) = b_{1,1}e_1 + b_{2,1}e_2$$

vérifie nécessairement

$$b_{2,1} \neq 0.$$

Puisque  $P$  est stable,  $v$  induit un endomorphisme  $\bar{v}$  sur le quotient  $\mathbb{C}^n/P$ . Sur  $\mathbb{C}$ , tout endomorphisme est triangularisable. On choisit donc une base du quotient dans laquelle  $\bar{v}$  est représenté par une matrice triangulaire supérieure  $C$ .

En relevant cette base du quotient à  $\mathbb{C}^n$ , on complète  $(e_1, e_2)$  en une base

$$(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$$

de  $\mathbb{C}^n$  dans laquelle la matrice de  $v$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} B & (*) \\ (0) & C \end{pmatrix}$$

où  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 2}$  vérifie

$$b_{2,1} \neq 0$$

et où  $C \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{C})$  est triangulaire supérieure.

### Question 24

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \text{Vect}(I_n)$ . Alors  $A^T$  n'est pas non plus une matrice scalaire. D'après la question 23,  $A^T$  est semblable à une matrice

$$N = \begin{pmatrix} B & R \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où  $C$  est triangulaire supérieure et où, si

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix},$$

on a  $b_{2,1} \neq 0$ .

Alors  $A$  est semblable à

$$N^T = \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ R^T & C^T \end{pmatrix}.$$

On conjugue maintenant  $N^T$  par la matrice de permutation qui renverse l'ordre de la base. Cette opération :

- place le bloc  $B^T$  en bas à droite ;
- transforme  $C^T$ , qui est triangulaire inférieure, en une matrice triangulaire supérieure ;
- place le bloc  $R^T$  en haut à droite ;
- laisse un bloc nul en bas à gauche.

On obtient une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} C' & (*) \\ 0 & B' \end{pmatrix},$$

où  $C'$  est triangulaire supérieure et où

$$B' = \begin{pmatrix} b_{2,2} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{1,1} \end{pmatrix}.$$

En particulier, le coefficient sous-diagonal de  $B'$  vaut encore

$$b_{2,1} \neq 0.$$

La matrice obtenue est donc triangulaire supérieure sauf en position  $(n, n-1)$ , où le coefficient est non nul. Elle est donc presque triangulaire supérieure.

Ainsi

$A$  est semblable à une matrice presque triangulaire supérieure.

**Question 25**

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\operatorname{tr}(u) = 0.$$

Montrons que

$$u \in \Sigma_4\mathcal{C}(E).$$

Si  $\dim E \leq 1$ , alors  $\operatorname{tr}(u) = 0$  impose  $u = 0$ , et  $u$  est somme de quatre endomorphismes nuls, donc de carré nul.

On suppose désormais  $n = \dim E \geq 2$ .

Si  $u = 0$ , le résultat est immédiat. Sinon,  $u$  n'est pas une homothétie : en effet, si  $u = \lambda \operatorname{Id}_E$ , alors

$$0 = \operatorname{tr}(u) = n\lambda,$$

donc  $\lambda = 0$ , ce qui donnerait  $u = 0$ .

Soit  $A$  une matrice de  $u$  dans une base de  $E$ . D'après la question 24,  $A$  est semblable à une matrice presque triangulaire supérieure. Comme la propriété d'être somme de quatre matrices de carré nul est invariante par similitude, on peut supposer que  $A$  est presque triangulaire supérieure.

Comme  $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(u) = 0$ , la question 19 donne un vecteur  $C_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que

$$A + V + E_{C_0}$$

soit semblable à  $J_n$ .

D'après la question 20,  $J_n$  est somme de deux matrices de carré nul. Par similitude,  $A + V + E_{C_0}$  est donc aussi somme de deux matrices de carré nul :

$$A + V + E_{C_0} = S_1 + S_2, \quad S_1^2 = S_2^2 = 0.$$

D'après la question 21,

$$V + E_{C_0} = T_1 + T_2, \quad T_1^2 = T_2^2 = 0.$$

Alors

$$A = (A + V + E_{C_0}) - (V + E_{C_0}) = S_1 + S_2 - T_1 - T_2.$$

Or  $(-T_1)^2 = T_1^2 = 0$  et  $(-T_2)^2 = T_2^2 = 0$ . Donc  $A$  est somme de quatre matrices de carré nul.

Ainsi l'endomorphisme  $u$  lui-même est somme de quatre endomorphismes de carré nul :

$$\boxed{u \in \Sigma_4\mathcal{C}(E).}$$

---

*Conclusion finale : sur un espace vectoriel complexe de dimension finie, tout endomorphisme de trace nulle est somme de quatre endomorphismes de carré nul.*

---