Corrigé Math 2 PSI 2026

Probabilité qu'un entier choisi au hasard et uniformément dans $[\![1\,;\,n]\!]$ soit sans facteur à la puissance k

---

Partie 1 — Calcul de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$

Question 1.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$, on a $\mathrm{e}^{i\theta}t \neq 1$ pour tout $t \in [0,1]$ (sinon $\mathrm{e}^{i\theta} = 1/t \geq 1$, impossible si $|\mathrm{e}^{i\theta}| = 1$ sauf $t = 1$ et $\mathrm{e}^{i\theta} = 1$, exclu). On peut donc écrire la somme géométrique :

$$\frac{1-(\mathrm{e}^{i\theta}t)^n}{1-\mathrm{e}^{i\theta}t} = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{i\theta}t)^j.$$

En multipliant par $\mathrm{e}^{i\theta}$ et en intégrant terme à terme sur $[0,1]$ (somme finie) :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{i\theta}\,\frac{1-(\mathrm{e}^{i\theta}t)^n}{1-\mathrm{e}^{i\theta}t}\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i(j+1)\theta}\int_0^1 t^j\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{i(j+1)\theta}}{j+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k}.$$

Question 2.

Convergence. La série $\sum_{k\geq 1} \mathrm{e}^{ik\theta}/k$ converge par le critère d'Abel : la suite $(1/k)$ décroît vers 0, et les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{i\theta}\frac{1-\mathrm{e}^{in\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}$ sont bornées (en module) par $\frac{2}{|1-\mathrm{e}^{i\theta}|}$.

Passage à la limite. D'après la question 1 :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\,t^n}{1-\mathrm{e}^{i\theta}t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $t \in [0,1]$, $|1-\mathrm{e}^{i\theta}t|^2 = 1 - 2t\cos\theta + t^2$, fonction continue strictement positive sur $[0,1]$ (car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$). Elle atteint un minimum $c > 0$ sur $[0,1]$. Donc :

$$\left|\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\,t^n}{1-\mathrm{e}^{i\theta}t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{c}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par passage à la limite :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}t}\,\mathrm{d}t.}$$

Question 3.

Soit $\theta \in]0,\pi[$. On utilise la fonction $u_\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $u_\theta(t) = \arctan\left(\dfrac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)$ (le dénominateur ne s'annule pas car $1 - t\cos\theta \geq 1 - \cos\theta > 0$ sur $[0,1]$).

En posant $f(t) = \dfrac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}$, on calcule :

$$f'(t) = \frac{\sin\theta\,(1-t\cos\theta) + t\sin\theta\cos\theta}{(1-t\cos\theta)^2} = \frac{\sin\theta}{(1-t\cos\theta)^2},$$

puis
$$u_\theta'(t) = \frac{f'(t)}{1+f(t)^2} = \frac{\sin\theta}{(1-t\cos\theta)^2 + t^2\sin^2\theta} = \frac{\sin\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}.$$

Or, en multipliant numérateur et dénominateur par $1-\mathrm{e}^{-i\theta}t$:
$$\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}t} = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-t}{1-2t\cos\theta+t^2}.$$
La partie imaginaire vaut $\dfrac{\sin\theta}{1-2t\cos\theta+t^2} = u_\theta'(t)$.

En prenant la partie imaginaire de la formule de la question 2 :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \int_0^1 u_\theta'(t)\,\mathrm{d}t = u_\theta(1) - u_\theta(0).$$
On a $u_\theta(0) = 0$, et :
$$u_\theta(1) = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right) = \arctan\left(\frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\sin^2(\theta/2)}\right) = \arctan(\cot(\theta/2))\,.$$
Comme $\theta/2 \in]0,\pi/2[$, on a $\cot(\theta/2) > 0$ et $\arctan(\cot\alpha) = \pi/2 - \alpha$ pour $\alpha \in]0,\pi/2[$, d'où $u_\theta(1) = \dfrac{\pi-\theta}{2}$:
$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi-\theta}{2}.}$$

Question 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\cos(nt)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ avec $\sum 1/n^2$ convergente. La série $\sum \cos(nt)/n^2$ converge donc *normalement* sur $\mathbb{R}$. Chaque fonction $t \mapsto \cos(nt)/n^2$ étant continue sur $\mathbb{R}$, S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Question 5.

La série $\sum \sin(n\theta)/n$ converge simplement sur $]0,\pi[$ vers $\theta \mapsto (\pi-\theta)/2$ (question 3). Pour $\theta \in [0,\pi[$ et $n \geq 1$:
$$\int_0^\theta \frac{\sin(n\varphi)}{n}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1-\cos(n\theta)}{n^2}.$$
La série $\sum \dfrac{1-\cos(n\theta)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (majorée par $2/n^2$), donc on peut intervertir somme et intégrale via le théorème d'intégration terme à terme appliqué à la série $\sum \sin(n\varphi)/n$: on majore $\left|\sum_{n=1}^N \frac{\sin(n\varphi)}{n}\right|$ par une fonction intégrable indépendante de N grâce à la borne d'Abel, puis on passe à la limite. Concrètement, en intégrant la formule de la question 3 :
$$\int_0^\theta \frac{\pi-\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi\theta}{2} - \frac{\theta^2}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos(n\theta)}{n^2} = S(0) - S(\theta).$$
On obtient pour tout $\theta \in [0,\pi[$:
$$\boxed{S(\theta) = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} + S(0).}$$
(L'égalité s'étend à $\theta = \pi$ par continuité des deux membres.)

Question 6.

On note $f_n(t) = \dfrac{\cos(nt)}{n^2(n^2+x^2)}$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{n^2(n^2+x^2)}, \quad |f_n'(t)| = \frac{|\sin(nt)|}{n(n^2+x^2)} \leq \frac{1}{n^3}, \quad |f_n''(t)| = \frac{|\cos(nt)|}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ces majorations sont les termes généraux de séries convergentes ($\sum 1/n^4$, $\sum 1/n^3$, $\sum 1/n^2$). Donc les séries $\sum f_n$, $\sum f_n'$, $\sum f_n''$ convergent normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. Par théorème de dérivation terme à terme appliqué deux fois, g_x est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$g_x''(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2+x^2}.$$

Par ailleurs $x^2 g_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^2\cos(nt)}{n^2(n^2+x^2)}$, et donc :

$$g_x''(t) - x^2 g_x(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2+x^2)\cos(nt)}{n^2(n^2+x^2)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2} = -S(t).$$

Question 7.

Pour $\theta \in [0, \pi[$, $S(\theta) = \theta^2/4 - \pi\theta/2 + S(0)$. On cherche donc $P(t) = at^2 + bt + c$ vérifiant, pour $t \in [0, \pi[$:

$$P''(t) - x^2 P(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{\pi t}{2} - S(0).$$

Comme $P''(t) = 2a$, on identifie les coefficients : $-ax^2 = -1/4$, $-bx^2 = \pi/2$, $2a - cx^2 = -S(0)$, d'où :

$$a = \frac{1}{4x^2}, \quad b = -\frac{\pi}{2x^2}, \quad c = \frac{1}{2x^4} + \frac{S(0)}{x^2}.$$

$$\boxed{P(t) = \frac{t^2}{4x^2} - \frac{\pi t}{2x^2} + \frac{1}{2x^4} + \frac{S(0)}{x^2}.}$$

Question 8.

Calcul de $g_x'(0)$ et $g_x'(\pi)$. On a $g_x'(t) = -\sum \dfrac{\sin(nt)}{n(n^2+x^2)}$. Comme $\sin(0) = \sin(n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{g_x'(0) = g_x'(\pi) = 0.}$$

Calcul de $g_x''(0)$. Sur $[0, \pi]$, l'équation différentielle $y'' - x^2 y = -S$ a pour solution générale (équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants) :

$$g_x(t) = A\cosh(xt) + B\sinh(xt) + P(t), \quad t \in [0, \pi].$$

Les conditions $g_x'(0) = 0$ et $g_x'(\pi) = 0$ donnent, avec $g_x'(t) = Ax\sinh(xt) + Bx\cosh(xt) + P'(t)$ et $P'(0) = -\pi/(2x^2)$, $P'(\pi) = \pi/(2x^2) - \pi/(2x^2) = 0$:

$$\begin{cases} Bx - \dfrac{\pi}{2x^2} = 0 \\ Ax\sinh(\pi x) + Bx\cosh(\pi x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow B = \frac{\pi}{2x^3}, \quad A = -\frac{\pi}{2x^3} \cdot \frac{\cosh(\pi x)}{\sinh(\pi x)}.$$

On dérive deux fois : $g_x''(t) = Ax^2\cosh(xt) + Bx^2\sinh(xt) + P''(t)$ avec $P''(t) = 1/(2x^2)$. En $t = 0$:

$$g_x''(0) = Ax^2 + \frac{1}{2x^2} = -\frac{\pi}{2x} \cdot \frac{\cosh(\pi x)}{\sinh(\pi x)} + \frac{1}{2x^2}.$$

Or $\dfrac{\cosh(\pi x)}{\sinh(\pi x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi x}+\mathrm{e}^{-\pi x}}{\mathrm{e}^{\pi x}-\mathrm{e}^{-\pi x}} = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-2\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi x}}$, d'où :

$$\boxed{g_x''(0) = -\frac{\pi}{2x}\cdot\frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi x}} + \frac{1}{2x^2}.}$$

Question 9.

D'après la question 6, $g_x''(0) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$. En reportant dans la question 8 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2} = \frac{\pi}{2x}\cdot\frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi x}} - \frac{1}{2x^2}.$$

On multiplie par $2x^2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x^2}{n^2+x^2} = \pi x\cdot\frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi x}} - 1.$$

Avec $\dfrac{1+\mathrm{e}^{-2\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2\pi x}+1}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1} = 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x^2}{n^2+x^2} = \pi x + \frac{2\pi x}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1} - 1,$$

soit, après réarrangement :

$$\boxed{\frac{2\pi x}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1} = 1 - \pi x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x^2}{n^2+x^2}.}$$

La formule, démontrée pour $x \neq 0$, s'étend par continuité en $x = 0$ (les deux membres valent 1).

Partie 2 — Développement en série entière de $h : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$

Question 10.

Pour $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|-x^2/n^2| < 1$. La somme géométrique donne :

$$\sum_{k=0}^{N}\left(-\frac{x^2}{n^2}\right)^k = \frac{1-\left(-x^2/n^2\right)^{N+1}}{1-(-x^2/n^2)} = \frac{n^2}{n^2+x^2}\left(1-(-1)^{N+1}\frac{x^{2N+2}}{n^{2N+2}}\right).$$

En divisant par n^2 puis en isolant le terme $1/(n^2+x^2)$:

$$\frac{1}{n^2+x^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{N}\left(-\frac{x^2}{n^2}\right)^k + (-1)^{N+1}\frac{1}{n^2+x^2}\cdot\frac{x^{2N+2}}{n^{2N+2}},$$

ce qui définit $R_{N,n}(x) = (-1)^{N+1}\dfrac{1}{x^2+n^2}\cdot\dfrac{x^{2N+2}}{n^{2N+2}}$.

Pour $n \geq 1$, $x^2+n^2 \geq n^2 \geq 1$, donc $\dfrac{1}{x^2+n^2} \leq 1$ et :

$$|R_{N,n}(x)| \leq \frac{|x|^{2N+2}}{n^{2N+2}}.$$

La série converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |R_{N,n}(x)| \leq |x|^{2N+2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2N+2}} = \zeta(2N+2)\,|x|^{2N+2}.$$

Question 11.

Limite de ζ. Pour $s \geq 2$:

$$0 \leq \zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{1}{s-1} \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0,$$

donc $\lim\limits_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.

Identité. Pour $x \in]-1,1[$, en multipliant la formule de la question 10 par x^2 :

$$\frac{x^2}{x^2+n^2} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{n^{2k+2}} + x^2 R_{N,n}(x).$$

On somme sur $n \geq 1$. La double somme finie–infinie se réorganise par convergence absolue :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{n^{2k+2}} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x^{2k+2}\,\zeta(2k+2) = \sum_{j=1}^{N+1} (-1)^{j+1}\zeta(2j)\,x^{2j}.$$

Le reste est contrôlé par :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 R_{N,n}(x)\right| \leq x^2\,\zeta(2N+2)\,|x|^{2N+2} \leq \zeta(2)\,|x|^{2N+4} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

puisque $|x| < 1$ et $\zeta(2N+2) \leq \zeta(2)$. En passant à la limite $N \to +\infty$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\zeta(2k)\,x^{2k}, \quad x \in]-1,1[.}$$

Question 12.

Pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, la question 9 donne :

$$\frac{2\pi x}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1} = 1 - \pi x + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+n^2},$$

et la question 11 :

$$\frac{2\pi x}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1} = 1 - \pi x + \sum_{k=1}^{+\infty} 2(-1)^{k+1}\zeta(2k)\,x^{2k}.$$

On pose $u = 2\pi x$, soit $x = u/(2\pi)$, ce qui donne $u \in]-2\pi, 2\pi[$ et :

$$h(u) = \frac{u}{\mathrm{e}^u - 1} = 1 - \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2(-1)^{k+1}\zeta(2k)\,\frac{u^{2k}}{(2\pi)^{2k}}.$$

Soit, en simplifiant le coefficient $2/(2\pi)^{2k} = 1/(2^{2k-1}\pi^{2k})$:

$$\boxed{h(u) = 1 - \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\,u^{2k}, \quad u \in]-2\pi, 2\pi[.}$$

La formule est valable en $u = 0$ par continuité (les deux membres valent 1). h est donc développable en série entière sur $]-2\pi, 2\pi[$.

Coefficients $b_k = h^{(k)}(0)$. Par identification au DSE, $b_k/k!$ est le coefficient de u^k. On lit :

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_{2k+1} = 0 \ (k \geq 1), \quad b_{2k} = (2k)!\,(-1)^{k+1}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \ (k \geq 1).$$

Question 13.

Pour $x \neq 0$, $h(x) \cdot \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Le DSE de $\dfrac{e^x-1}{x} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{(n+1)!}$ converge sur $\mathbb{R}$, et celui de h sur $]-2\pi, 2\pi[$. Le produit de Cauchy de ces deux séries entières s'écrit :

$$1 = h(x) \cdot \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n+1-k)!}\right)x^n.$$

Par unicité du DSE de la fonction constante 1, le coefficient de x^0 vaut 1 et tous les autres sont nuls. Pour $n \geq 1$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!\,(n+1-k)!} = 0.}$$

Question 14.

Calcul de b_2. On applique la relation pour $n = 2$:

$$\frac{b_0}{0!\,3!} + \frac{b_1}{1!\,2!} + \frac{b_2}{2!\,1!} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{b_2}{2} = 0 \Longrightarrow b_2 = \frac{1}{6}.$$

Calcul de b_4. On applique la relation pour $n = 4$, en utilisant $b_3 = 0$:

$$\frac{b_0}{0!\,5!} + \frac{b_1}{1!\,4!} + \frac{b_2}{2!\,3!} + \frac{b_3}{3!\,2!} + \frac{b_4}{4!\,1!} = 0,$$

soit, après réduction au dénominateur commun 720 :

$$\frac{6}{720} - \frac{15}{720} + \frac{10}{720} + 0 + \frac{30\,b_4}{720} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{720} + \frac{b_4}{24} = 0 \Longrightarrow b_4 = -\frac{1}{30}.$$

Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$. La formule $b_{2k} = (2k)!\,(-1)^{k+1}\zeta(2k)/(2^{2k-1}\pi^{2k})$ donne :

- Pour $k = 1$: $b_2 = 2! \cdot \dfrac{\zeta(2)}{2\pi^2} = \dfrac{\zeta(2)}{\pi^2}$. Donc $\zeta(2) = \pi^2 b_2 = \dfrac{\pi^2}{6}$.
- Pour $k = 2$: $b_4 = 4! \cdot (-1) \cdot \dfrac{\zeta(4)}{2^3\pi^4} = -\dfrac{3\zeta(4)}{\pi^4}$. Donc $\zeta(4) = -\dfrac{\pi^4 b_4}{3} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.}$$

Partie 3 — Probabilité $q_n(k)$

Question 15.

On démontre la formule par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$. Le cas $r = 1$ donne $1 + x_1$, conforme à l'égalité avec un seul terme $m = 1$.

Hérédité. Supposons la formule au rang r. Alors :

$$\prod_{i=1}^{r+1}(1 + x_i) = \left(1 + \sum_{m=1}^{r} \sigma_m^{(r)}\right)(1 + x_{r+1}), \quad \sigma_m^{(r)} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq r} x_{i_1}\cdots x_{i_m}.$$

Le développement donne $1+\sum_{m=1}^{r}\sigma_m^{(r)}+x_{r+1}+\sum_{m=1}^{r}\sigma_m^{(r)}x_{r+1}$. Or les m-uplets $1\leq i_1<\cdots<i_m\leq r+1$ se répartissent en deux familles selon que $i_m\leq r$ ou $i_m=r+1$:

$$\sigma_m^{(r+1)}=\sigma_m^{(r)}+x_{r+1}\,\sigma_{m-1}^{(r)},$$

avec la convention $\sigma_0^{(r)}=1$. En sommant sur $m\in[\![1,r+1]\!]$ et en regroupant :

$$1+\sum_{m=1}^{r+1}\sigma_m^{(r+1)}=1+\sum_{m=1}^{r}\sigma_m^{(r)}+x_{r+1}+\sum_{m=1}^{r}\sigma_m^{(r)}x_{r+1},$$

ce qui est exactement le développement obtenu. La formule est donc établie pour tout $r\in\mathbb{N}^*$.

Question 16.

Indicatrice du complémentaire. Pour tout $\omega\in\Omega$, $\omega\in\bar{A}$ ssi $\omega\notin A$, donc $\mathbf{1}_{\bar{A}}(\omega)=1-\mathbf{1}_A(\omega)$, soit $\mathbf{1}_{\bar{A}}=1-\mathbf{1}_A$.

Indicatrice d'une intersection. Pour $\omega\in\Omega$, $\prod_{i=1}^{m}\mathbf{1}_{A_i}(\omega)=1$ ssi tous les $\mathbf{1}_{A_i}(\omega)$ valent 1, ssi ω appartient à tous les A_i, ssi $\omega\in\bigcap_{i=1}^{m}A_i$. Sinon, le produit vaut 0. Donc $\mathbf{1}_{A_1}\cdots\mathbf{1}_{A_m}=\mathbf{1}_{A_1\cap\cdots\cap A_m}$.

Question 17.

On part de l'identité ensembliste $\overline{A_1\cup\cdots\cup A_r}=\bar{A}_1\cap\cdots\cap\bar{A}_r$, qui donne :

$$\mathbf{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_r}=1-\prod_{i=1}^{r}\mathbf{1}_{\bar{A}_i}=1-\prod_{i=1}^{r}(1-\mathbf{1}_{A_i}).$$

On applique la question 15 avec $x_i=-\mathbf{1}_{A_i}$:

$$\prod_{i=1}^{r}(1-\mathbf{1}_{A_i})=1+\sum_{m=1}^{r}(-1)^m\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq r}\mathbf{1}_{A_{i_1}}\cdots\mathbf{1}_{A_{i_m}}=1+\sum_{m=1}^{r}(-1)^m\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq r}\mathbf{1}_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_m}},$$

en utilisant la deuxième identité de la question 16. On reporte :

$$\mathbf{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_r}=\sum_{m=1}^{r}(-1)^{m+1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq r}\mathbf{1}_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_m}}.$$

Comme les A_i sont en nombre fini, on prend l'espérance des deux membres en utilisant $P(A)=E(\mathbf{1}_A)$ et la linéarité :

$$\boxed{P(A_1\cup\cdots\cup A_r)=\sum_{m=1}^{r}(-1)^{m+1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq r}P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_m}).}$$

Question 18.

Un entier $m\in[\![1,n]\!]$ admet un facteur à la puissance k ssi il existe un nombre premier p (forcément parmi $p_1,\ldots,p_r$ puisque $p\leq m\leq n$) tel que $p^k\mid m$. Donc :

$$\overline{S_n(k)}=\bigcup_{i=1}^{r}\{m\in[\![1,n]\!]:p_i^k\mid m\}=\bigcup_{i=1}^{r}A_n(p_i^k),$$

ce qui donne $q_n(k)=P_n(S_n(k))=1-P_n\big(\bigcup_{i=1}^{r}A_n(p_i^k)\big)$.

On applique le crible (question 17) à la famille $\big(A_n(p_i^k)\big)_{1\leq i\leq r}$. Par unique factorisation, $p_{i_1}^k\mid j,\ldots,p_{i_m}^k\mid j$ équivaut à $p_{i_1}^k\cdots p_{i_m}^k\mid j$ (les p_{i_ℓ} sont des premiers distincts). Donc :

$$A_n(p_{i_1}^k)\cap\cdots\cap A_n(p_{i_m}^k)=A_n\big(p_{i_1}^kp_{i_2}^k\cdots p_{i_m}^k\big).$$

On obtient :

$$\boxed{q_n(k) = 1 + \sum_{m=1}^{r} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le r} (-1)^m \, P_n\big(A_n(p_{i_1}^k p_{i_2}^k \cdots p_{i_m}^k)\big).}$$

Question 19.

Pour $d \in \mathbb{N}^*$, le nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ multiples de d vaut $\lfloor n/d \rfloor$, donc $P_n(A_n(d)) = \lfloor n/d \rfloor / n$.

Dans la formule de la question 18, on pose $d' = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_m}$. Alors d' est un produit de m premiers distincts, donc $\mu(d') = (-1)^m$, et $p_{i_1}^k \cdots p_{i_m}^k = (d')^k$. La formule devient :

$$q_n(k) = 1 + \sum_{m=1}^{r} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le r} \mu(p_{i_1}\cdots p_{i_m}) \frac{\lfloor n/(p_{i_1}\cdots p_{i_m})^k \rfloor}{n} = \frac{1}{n} \sum_{d\in\mathcal{D}} \mu(d) \, \lfloor n/d^k \rfloor,$$

où $\mathcal{D} = \{1\} \cup \big\{p_{i_1}\cdots p_{i_m} : 1 \le i_1 < \cdots < i_m \le r,\, m \ge 1\big\}$: ce sont les entiers d sans facteur carré dont les facteurs premiers sont $\le p_r$.

On peut étendre la somme à tous les $d \in \mathbb{N}^*$:

- Si d admet un facteur carré, $\mu(d) = 0$, contribution nulle.
- Si d est sans facteur carré et possède un facteur premier $> p_r$, alors $d > p_r$. Si l'on prend un tel d avec un facteur premier $> n$, alors $d > n$, et $d^k > n$ donc $\lfloor n/d^k \rfloor = 0$. Plus généralement, pour les $d \in \mathbb{N}^*$ non encore comptés, on peut vérifier que $d^k > n$ entraîne $\lfloor n/d^k \rfloor = 0$, et que les autres cas sont exclus dans $\mathcal{D}$ (les premiers entre p_r et n n'existent pas par définition de p_r).

Tous les termes ajoutés sont nuls, d'où :

$$\boxed{q_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{+\infty} \mu(d) \, \lfloor n/d^k \rfloor.}$$

Question 20.

Identification de $q_n(k)$ comme une intégrale. La fonction f_n proposée est constante sur chaque $[d, d+1[$, donc :

$$\int_{[1,+\infty[} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{d=1}^{+\infty} \int_d^{d+1} \frac{\mu(d)}{n} \lfloor n/d^k \rfloor \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{+\infty} \mu(d) \, \lfloor n/d^k \rfloor = q_n(k).$$

Théorème de convergence dominée. On applique le théorème à (f_n) sur $[1, +\infty[$.

Convergence simple. Pour $t \in [d, d+1[$ fixé, $\lfloor n/d^k \rfloor / n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/d^k$, donc :

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mu(d)}{d^k} =: f(t), \quad t \in [d, d+1[.$$

Domination. Pour $t \in [d, d+1[$, $|f_n(t)| = |\mu(d)| \, \lfloor n/d^k \rfloor / n \le \lfloor n/d^k \rfloor / n \le 1/d^k$. La fonction $\varphi : t \mapsto 1/\lfloor t \rfloor^k$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\lfloor t \rfloor^k} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^k} = \zeta(k) < +\infty \quad (k \ge 2).$$

Conclusion. Par convergence dominée :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q_n(k) = \int_{[1,+\infty[} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} = \ell.}$$

Partie 4 — Calcul de $\displaystyle\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$

Question 21.

Inclusions $F_N \subset E_N \subset F_{N^2}$**.** Si $(i,j) \in F_N$ alors $i \leq ij \leq N$ et $j \leq ij \leq N$, donc $(i,j) \in E_N$. Si $(i,j) \in E_N$ alors $i, j \leq N$ donc $ij \leq N^2$, et $(i,j) \in F_{N^2}$.

Convergence de (S_N)**.** En substituant $m = de$ dans la définition de S_N :

$$S_N = \sum_{m=1}^{N} \sum_{d \mid m} |u_d|\, v_{m/d} = \sum_{(d,e) : de \leq N,\, d \leq N,\, e \leq N} |u_d|\, v_e = \sum_{(i,j) \in F_N} |u_i|\, v_j \geq 0.$$

La suite (S_N) est croissante (les nouveaux termes ajoutés sont positifs). De plus :

$$S_N \leq \sum_{(i,j) \in E_N} |u_i|\, v_j = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \right) \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^s} \right) \leq \zeta(s) \cdot \zeta(s) = \zeta(s)^2 < +\infty,$$

puisque $|\mu(i)| \leq 1$. Une suite croissante majorée converge, donc (S_N) converge.

Identité. Notons $T_N = \sum_{(i,j) \in E_N} |u_i| v_j = \left(\sum_{i=1}^{N} |u_i| \right) \left(\sum_{j=1}^{N} v_j \right)$. On a, par les inclusions :

$$S_N \leq T_N \leq S_{N^2}.$$

Quand $N \to +\infty$, $T_N \to \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |u_i| \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} v_j \right) = \left(\sum |\mu(i)|/i^s \right) \zeta(s)$, et S_N converge vers une limite finie L, $S_{N^2} \to L$ aussi. Par encadrement :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{d \mid m} |u_d|\, v_{m/d} = L = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right).$$

Question 22.

Inégalité. On a, comme à la question 21 :

$$\left(\sum_{i=1}^{N} u_i \right) \left(\sum_{j=1}^{N} v_j \right) = \sum_{(i,j) \in E_N} u_i v_j, \quad \sum_{m=1}^{N} \sum_{d \mid m} u_d v_{m/d} = \sum_{(i,j) \in F_N} u_i v_j.$$

La différence vaut donc $\sum_{(i,j) \in E_N \setminus F_N} u_i v_j$. Par l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{(i,j) \in E_N \setminus F_N} u_i v_j \right| \leq \sum_{(i,j) \in E_N \setminus F_N} |u_i||v_j| = \sum_{(i,j) \in E_N} |u_i||v_j| - \sum_{(i,j) \in F_N} |u_i||v_j|.$$

Passage à la limite. Le membre de droite ci-dessus est $T_N - S_N$ avec les notations de la question 21. Par encadrement $S_N \leq T_N \leq S_{N^2}$ et le fait que (S_N) et (S_{N^2}) ont la même limite finie L : $T_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} L$ et $S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} L$, donc $T_N - S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

Par ailleurs, $u_d v_{m/d} = \dfrac{\mu(d)}{d^s} \cdot \dfrac{1}{(m/d)^s} = \dfrac{\mu(d)}{m^s}$. Donc $\displaystyle\sum_{d \mid m} u_d v_{m/d} = \frac{1}{m^s} \sum_{d \mid m} \mu(d)$. Par passage à la limite dans l'inégalité :

$$\boxed{\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{d \mid m} \mu(d) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \right).}$$

Question 23.

Pour $m = 1$, l'unique diviseur est 1, et $\mu(1) = 1$. Donc $\sum_{d|1} \mu(d) = 1$.

Pour $m \geq 2$, soit $m = p_1^{a_1} \cdots p_q^{a_q}$ sa décomposition en facteurs premiers, avec $q \geq 1$ et $a_i \geq 1$. Les diviseurs d de m pour lesquels $\mu(d) \neq 0$ sont les diviseurs sans facteur carré, c'est-à-dire les produits $\prod_{i\in I} p_i$ pour $I \subset [\![1, q]\!]$. Pour un tel I, $\mu\big(\prod_{i\in I} p_i\big) = (-1)^{|I|}$. Ainsi :

$$\sum_{d|m} \mu(d) = \sum_{I\subset[\![1,q]\!]} (-1)^{|I|} = \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} (-1)^j = (1-1)^q = 0.$$

$$\boxed{\sum_{d|m} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Question 24.

D'après la question 23, $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{d|m} \mu(d) = \frac{1}{1^s} \cdot 1 = 1$. La question 22 donne alors :

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \zeta(s).$$

Comme $\zeta(s) > 0$ pour $s > 1$:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} = \frac{1}{\zeta(s)}, \quad s > 1.}$$

Question 25.

Pour $k \geq 2$, on combine les questions 20 et 24 (avec $s = k > 1$) :

$$\lim_{n\to+\infty} q_n(k) = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} = \frac{1}{\zeta(k)}.$$

Cas particuliers. Les valeurs $\zeta(2) = \pi^2/6$ et $\zeta(4) = \pi^4/90$ obtenues à la question 14 donnent :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q_n(2) = \frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}6079, \qquad \lim_{n\to+\infty} q_n(4) = \frac{90}{\pi^4} \approx 0{,}9239.}$$

Interprétation. Quand n est grand, environ 60,8% des entiers de $[\![1, n]\!]$ sont sans facteur carré ($k = 2$), et environ 92,4% sont sans facteur quatrième puissance ($k = 4$).

Fin du corrigé