

Correction détaillée

X-ENS 2026 – MP-MPI – Mathématiques A

Thème : norme subordonnée, principe du maximum, inégalité de Von Neumann, rayon numérique et conjecture de Crouzeix

Remarque préliminaire. On adopte rigoureusement les notations du sujet. En particulier, le produit hermitien est *linéaire en la première variable* et semi-linéaire en la seconde :

$$\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}.$$

On note, pour un polynôme p et un compact $S \subset \mathbb{C}$,

$$\|p\|_S := \sup_{\alpha \in S} |p(\alpha)|.$$

Préliminaires

1) **Existence de $\|A\|$ et formule $\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La fonction

$$\varphi : x \in \mathbb{C}^n \mapsto \|Ax\|$$

est continue. La sphère unité

$$S := \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| = 1\}$$

est fermée et bornée dans un espace vectoriel de dimension finie ; elle est donc compacte. La fonction φ atteint donc son maximum sur S , ce qui justifie l'existence de

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Pour $x \neq 0$, posons $u = x/\|x\|$; alors $\|u\| = 1$ et

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|Au\|.$$

On en déduit immédiatement

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| = \|A\|.$$

Comme le maximum sur la sphère est atteint, on obtient aussi

$$\boxed{\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}.$$

2) Cas d'une matrice diagonale

Soit $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ unitaire,

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |x_i|^2 \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|^2 \right) \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|^2.$$

Donc

$$\|A\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

Réciproquement, si j est tel que $|\lambda_j| = \max_i |\lambda_i|$, alors pour le vecteur de base e_j ,

$$\|Ae_j\| = |\lambda_j| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

Ainsi

$$\|\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

3) Sous-multiplicativité

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ unitaire,

$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\| = \|A\| \|B\|.$$

En prenant le supremum sur les x unitaires, on obtient

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

4) Cas d'une matrice unitaire

Si U est unitaire, alors pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux|Ux \rangle = \langle x|U^*Ux \rangle = \langle x|x \rangle = \|x\|^2.$$

Donc $\|Ux\| = \|x\|$ et, en particulier,

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ux\| = 1.$$

Ensuite, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\|AU\| = \sup_{\|x\|=1} \|AUx\|.$$

Comme U est une bijection isométrique de la sphère unité sur elle-même,

$$\|AU\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\|.$$

De même,

$$\|UA\| = \sup_{\|x\|=1} \|UAx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Ainsi

$$\|U\| = 1 \quad \text{et} \quad \|AU\| = \|UA\| = \|A\|.$$

5) Encadrement de $\|p(A)\|$ lorsque $A = PDP^{-1}$

On suppose $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors

$$p(A) = P p(D) P^{-1}, \quad p(D) = \text{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)).$$

Par la question 2,

$$\|p(D)\| = \max_{1 \leq i \leq n} |p(\lambda_i)| = \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Minoration. Si $\lambda \in \sigma(A)$ et $x \neq 0$ vérifie $Ax = \lambda x$, alors

$$p(A)x = p(\lambda)x.$$

En normalisant x ,

$$|p(\lambda)| = \|p(A)x\| \leq \|p(A)\|.$$

En prenant le maximum sur $\sigma(A)$,

$$\|p\|_{\sigma(A)} \leq \|p(A)\|.$$

Majoration. Par sous-multiplicativité,

$$\|p(A)\| \leq \|P\| \|p(D)\| \|P^{-1}\| = \text{cond}(P) \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Ainsi

$$\boxed{\|p\|_{\sigma(A)} \leq \|p(A)\| \leq \text{cond}(P) \|p\|_{\sigma(A)}}.$$

A - Principe du maximum pour les polynômes

On fixe $n \geq 2$ et un polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n - 1$. On note $\mathbb{D} = \overline{D}(0, 1)$.

6) La matrice U est unitaire

La matrice U a pour colonnes

$$\begin{aligned} c_1 &= (z, 0, \dots, 0, s)^T, & c_2 &= (s, 0, \dots, 0, -\bar{z})^T, \\ c_3 &= e_2, & c_4 &= e_3, \dots, c_n = e_{n-1}. \end{aligned}$$

Comme $s \in \mathbb{R}_+$ et $s^2 = 1 - |z|^2$,

$$\|c_1\|^2 = |z|^2 + s^2 = 1, \quad \|c_2\|^2 = s^2 + |z|^2 = 1,$$

et

$$\langle c_1 | c_2 \rangle = zs + s(-z) = 0.$$

De plus, c_3, \dots, c_n sont des vecteurs de la base canonique, donc orthonormés, et ils sont orthogonaux à c_1, c_2 . Les colonnes de U forment donc une base orthonormale de \mathbb{C}^n , ce qui équivaut à l'unitarité.

$$\boxed{U \text{ est unitaire.}}$$

7) Calcul de $\langle p(U)e_1 | e_1 \rangle$

On va montrer que, pour tout $m \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$,

$$\langle U^m e_1 | e_1 \rangle = z^m.$$

Pour $m = 0$, c'est clair. Pour $1 \leq m \leq n - 1$, on vérifie par récurrence la formule

$$U^m e_1 = z^m e_1 + s \sum_{r=1}^m z^{m-r} e_{n-r+1}.$$

En effet, elle est vraie pour $m = 1$ puisque

$$U e_1 = z e_1 + s e_n.$$

Si elle est vraie au rang $m \leq n - 2$, alors, comme $Ue_j = e_{j-1}$ pour $j \geq 3$,

$$\begin{aligned} U^{m+1}e_1 &= U \left(z^m e_1 + s \sum_{r=1}^m z^{m-r} e_{n-r+1} \right) \\ &= z^m (ze_1 + se_n) + s \sum_{r=1}^m z^{m-r} e_{n-r} \\ &= z^{m+1}e_1 + s \sum_{r=1}^{m+1} z^{m+1-r} e_{n-r+1}. \end{aligned}$$

D'où l'affirmation. En prenant le coefficient selon e_1 ,

$$\langle U^m e_1 | e_1 \rangle = z^m.$$

Comme $\deg p \leq n - 1$,

$$\langle p(U)e_1 | e_1 \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \langle U^m e_1 | e_1 \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} a_m z^m = p(z),$$

si $p(X) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m X^m$. Ainsi

$$\boxed{p(z) = \langle p(U)e_1 | e_1 \rangle.}$$

8) Première forme du principe du maximum

Par la question 7,

$$|p(z)| = |\langle p(U)e_1 | e_1 \rangle| \leq \|p(U)e_1\| \leq \|p(U)\|.$$

Or U est unitaire (question 6), donc le théorème spectral du préambule donne une matrice unitaire V et des nombres $\mu_1, \dots, \mu_n \in \partial\mathbb{D}$ tels que

$$U = V \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) V^{-1}.$$

La question 5, appliquée avec $P = V$ et $\operatorname{cond}(V) = 1$, donne

$$\|p(U)\| \leq \|p\|_{\sigma(U)} \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}.$$

On a donc

$$\boxed{|p(z)| \leq \|p(U)\| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}.}$$

9) Cas strict lorsque $|z| < 1$

Ici $s > 0$. On montre d'abord que la famille

$$(e_1, Ue_1, \dots, U^{n-1}e_1)$$

est libre. En effet, d'après la formule obtenue à la question 7,

$$U^m e_1 = z^m e_1 + s \sum_{r=1}^m z^{m-r} e_{n-r+1} \quad (0 \leq m \leq n - 1).$$

Dans la base $(e_1, e_n, e_{n-1}, \dots, e_2)$, les vecteurs $e_1, Ue_1, \dots, U^{n-1}e_1$ ont une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale vaut

$$1, s, s, \dots, s,$$

qui est constituée de nombres non nuls. Ils forment donc une base de \mathbb{C}^n . En particulier, le polynôme minimal de U est de degré n .

Supposons par l'absurde que

$$|p(z)| = \|p\|_{\partial\mathbb{D}}.$$

Dans la chaîne d'inégalités de la question 8,

$$|\langle p(U)e_1 | e_1 \rangle| \leq \|p(U)e_1\| \leq \|p(U)\| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}},$$

toutes les inégalités sont alors des égalités. L'égalité dans Cauchy-Schwarz implique que $p(U)e_1$ est colinéaire à e_1 ; comme son coefficient selon e_1 vaut $p(z)$, on a

$$p(U)e_1 = p(z)e_1.$$

Posons $q(X) = p(X) - p(z)$. Alors $\deg q \leq n - 1$ et

$$q(U)e_1 = 0.$$

Comme $q(U)$ commute à U , pour tout $m \in \{0, \dots, n - 1\}$,

$$q(U)U^m e_1 = U^m q(U)e_1 = 0.$$

Or les vecteurs $U^m e_1$ forment une base; ainsi $q(U) = 0$. Le polynôme q annule donc U tout en étant de degré au plus $n - 1$, ce qui contredit le fait que le polynôme minimal de U soit de degré n .

Par conséquent,

$$\boxed{|z| < 1 \implies |p(z)| < \|p\|_{\partial\mathbb{D}}.}$$

10) Maximum sur le bord d'un compact fermé borné

Soit $S \subset \mathbb{C}$ fermé, borné, non vide. Comme S est compact et p continue, $|p|$ atteint son maximum sur S .

Si p est constant, l'égalité $\|p\|_S = \|p\|_{\partial S}$ est immédiate. Supposons donc p non constant et soit $z_0 \in S$ tel que

$$|p(z_0)| = \|p\|_S.$$

Si $z_0 \notin \partial S$, alors, par définition de ∂S , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\overline{D}(z_0, \delta) \subset S.$$

Considérons

$$q(X) = p(z_0 + \delta X).$$

Alors q est un polynôme non constant. D'après la question 9,

$$|q(0)| < \|q\|_{\partial\mathbb{D}}.$$

En revenant à p ,

$$|p(z_0)| < \sup_{|\xi|=1} |p(z_0 + \delta\xi)| \leq \|p\|_S,$$

contradiction.

Ainsi tout point de maximum appartient à ∂S , et donc

$$\boxed{\|p\|_S = \|p\|_{\partial S}.}$$

B - Inégalité de Von Neumann

On suppose désormais que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une contraction, c'est-à-dire $\|A\| \leq 1$. On veut montrer

$$\|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}.$$

11) Cas où A est unitaire

Si A est unitaire, le théorème spectral donne

$$A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^{-1}$$

avec U unitaire et $|\lambda_i| = 1$ pour tout i . La question 5, appliquée avec $P = U$ et $\operatorname{cond}(U) = 1$, donne

$$\|p(A)\| \leq \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Comme $\sigma(A) \subset \partial\mathbb{D}$, on en déduit

$$\boxed{\|p(A)\| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}} \leq \|p\|_{\mathbb{D}}.}$$

Or, pour un polynôme, la question 10 appliquée à $S = \mathbb{D}$ assure même que $\|p\|_{\mathbb{D}} = \|p\|_{\partial\mathbb{D}}$.

12) Existence de D_A et D_{A^*}

Comme $\|A\| \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle (I_n - A^*A)x | x \rangle = \|x\|^2 - \|Ax\|^2 \geq 0.$$

La matrice $I_n - A^*A$ est donc hermitienne positive, i.e. hermitienne à valeurs propres dans \mathbb{R}_+ . Par le théorème spectral, il existe une matrice unitaire U et des réels $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$I_n - A^*A = U \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) U^{-1}.$$

On pose alors

$$D_A := U \operatorname{diag}(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n}) U^{-1}.$$

Cette matrice est hermitienne, ses valeurs propres sont dans \mathbb{R}_+ , et

$$D_A^2 = I_n - A^*A.$$

De même, $I_n - AA^*$ est hermitienne positive, donc il existe une matrice hermitienne D_{A^*} à valeurs propres dans \mathbb{R}_+ telle que

$$D_{A^*}^2 = I_n - AA^*.$$

Ainsi

$$\boxed{D_A^2 = I_n - A^*A, \quad D_{A^*}^2 = I_n - AA^*}.$$

13) Représentation polynomiale de D_A et D_{A^*}

Montrons d'abord que A^*A et AA^* ont même spectre. Soit $\mu \neq 0$ valeur propre de A^*A , avec $A^*Ax = \mu x$ et $x \neq 0$. Alors $Ax \neq 0$ et

$$AA^*(Ax) = A(A^*Ax) = \mu(Ax),$$

donc $\mu \in \sigma(AA^*)$. La réciproque est identique. Enfin, 0 appartient au spectre de A^*A si et seulement si A n'est pas inversible, c'est-à-dire si et seulement si $0 \in \sigma(AA^*)$. Ainsi

$$\sigma(A^*A) = \sigma(AA^*).$$

Soit $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ cet ensemble fini de réels positifs ou nuls. Par interpolation de Lagrange, il existe un polynôme $q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$q(\mu_j) = \sqrt{1 - \mu_j} \quad (1 \leq j \leq r).$$

Comme A^*A est hermitienne diagonalisable, le calcul fonctionnel polynomial donne

$$q(A^*A) = D_A.$$

De même, puisque AA^* a le même spectre et est diagonalisable hermitienne,

$$q(AA^*) = D_{A^*}.$$

Donc

$$\boxed{\exists q \in \mathbb{C}[X] \text{ tel que } D_A = q(A^*A) \text{ et } D_{A^*} = q(AA^*)}.$$

14) Relations de commutation

Pour tout entier $m \geq 0$, on a par récurrence

$$A(A^*A)^m = (AA^*)^m A \quad \text{et} \quad A^*(AA^*)^m = (A^*A)^m A^*.$$

Par linéarité, pour tout polynôme q ,

$$Aq(A^*A) = q(AA^*)A, \quad A^*q(AA^*) = q(A^*A)A^*.$$

En utilisant la question 13, il vient

$$AD_A = D_{A^*}A, \quad A^*D_{A^*} = D_AA^*.$$

Donc

$$\boxed{A^*D_{A^*} = D_AA^*, \quad AD_A = D_{A^*}A}.$$

15) La matrice $U = \begin{pmatrix} A & D_{A^*} \\ -D_A & A^* \end{pmatrix}$ est unitaire

Comme D_A et D_{A^*} sont hermitiennes,

$$U^* = \begin{pmatrix} A^* & -D_A \\ D_{A^*} & A \end{pmatrix}.$$

Un calcul par blocs donne

$$U^*U = \begin{pmatrix} A^*A + D_A^2 & A^*D_{A^*} - D_AA^* \\ D_{A^*}A - AD_A & D_{A^*}^2 + AA^* \end{pmatrix}.$$

D'après les questions 12 et 14,

$$A^*A + D_A^2 = I_n, \quad D_{A^*}^2 + AA^* = I_n, \quad A^*D_{A^*} - D_AA^* = 0, \quad D_{A^*}A - AD_A = 0.$$

Ainsi $U^*U = I_{2n}$. De même $UU^* = I_{2n}$.

$$\boxed{U \text{ est unitaire.}}$$

16) Construction de U_k et preuve de l'inégalité de Von Neumann

Soit $p \in \mathbb{C}[X]$ de degré d . Posons $k = \max(d - 1, 0)$ et considérons la matrice U_k du sujet, de taille $(k + 2)n$, obtenue en remplaçant dans la matrice de la partie A les scalaires $z, s, -\bar{z}$ par les blocs $A, D_{A^*}, -D_A$.

(a) U_k est unitaire. Le calcul est exactement le même qu'à la question 15, les autres blocs n'étant que des blocs identité réalisant un décalage. On obtient bien

$$U_k^* U_k = I_{(k+2)n}.$$

(b) Le premier bloc de $p(U_k)$ est $p(A)$. Pour $0 \leq m \leq k + 1$, le bloc $(1, 1)$ de U_k^m vaut A^m . En effet, pour revenir du premier bloc au premier bloc en au plus $k + 1$ étapes, il n'existe qu'un seul chemin : rester dans le premier bloc à chaque étape, ce qui fournit A^m . Dès qu'on quitte le premier bloc vers le deuxième, il faut au moins $k + 2$ étapes pour revenir au premier bloc.

Ainsi, si $p(X) = \sum_{m=0}^d a_m X^m$ avec $d \leq k + 1$,

$$(p(U_k))_{1,1} = \sum_{m=0}^d a_m (U_k^m)_{1,1} = \sum_{m=0}^d a_m A^m = p(A).$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{C}^n$ unitaire et $X = (x, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{C}^{(k+2)n}$. Alors

$$p(U_k)X = (p(A)x, *, \dots, *)^T,$$

donc

$$\|p(A)x\| \leq \|p(U_k)X\| \leq \|p(U_k)\|.$$

En prenant le supremum sur les x unitaires,

$$\|p(A)\| \leq \|p(U_k)\|.$$

Or U_k est unitaire ; la question 11 donne alors

$$\|p(U_k)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}.$$

Par conséquent

$$\boxed{\|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}.}$$

C'est exactement l'inégalité de Von Neumann.

17) Conséquence pour une matrice quelconque

Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ arbitraire. Si $A = 0$, le résultat est évident. Sinon posons

$$B = \frac{A}{\|A\|}.$$

Alors $\|B\| = 1$, donc B est une contraction. Pour un polynôme p , définissons

$$q(X) = p(\|A\| X).$$

On a $q(B) = p(A)$; par la question 16,

$$\|p(A)\| = \|q(B)\| \leq \|q\|_{\mathbb{D}}.$$

Or

$$\|q\|_{\mathbb{D}} = \sup_{|z| \leq 1} |p(\|A\| z)| = \|p\|_{\overline{D}(0, \|A\|)}.$$

Donc

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|p(A)\| \leq \|p\|_{\overline{D}(0, \|A\|)}.$$

C - Hausdorffien et rayon numérique

On rappelle

$$\mathcal{H}(A) = \{\langle Ax|x \rangle \mid x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}, \quad r(A) = \max_{z \in \mathcal{H}(A)} |z|.$$

18) Inclusion du spectre dans le Hausdorffien

Soit $\lambda \in \sigma(A)$ et $x \neq 0$ un vecteur propre associé : $Ax = \lambda x$. Après normalisation, $\|x\| = 1$, et

$$\langle Ax|x \rangle = \langle \lambda x|x \rangle = \lambda \langle x|x \rangle = \lambda.$$

Donc $\lambda \in \mathcal{H}(A)$, d'où

$$\sigma(A) \subset \mathcal{H}(A).$$

19) Cas d'une matrice diagonale

Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ unitaire,

$$\langle Dx|x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2.$$

En posant $\alpha_i = |x_i|^2$, on a $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ et $\sum_i \alpha_i = 1$, donc

$$\langle Dx|x \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i.$$

Réciproquement, si $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ et $\sum_i \alpha_i = 1$, le vecteur

$$x = (\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$$

est unitaire et vérifie

$$\langle Dx|x \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i.$$

Ainsi

$$\mathcal{H}(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

C'est l'enveloppe convexe des λ_i .

20) Cas unitaire et cas hermitien

Si $A = UDU^{-1}$ avec U unitaire, alors pour tout vecteur unitaire x , en posant $y = U^{-1}x$,

$$\langle Ax|x \rangle = \langle UDU^{-1}x|x \rangle = \langle Dy|y \rangle.$$

Comme $x \mapsto y$ est une bijection de la sphère unité sur elle-même,

$$\mathcal{H}(A) = \mathcal{H}(D).$$

Si A est unitaire, ses valeurs propres sont de module 1 ; d'après la question 19,

$$\mathcal{H}(A) = \text{conv}(\sigma(A)),$$

convexe engendré des valeurs propres situées sur le cercle unité.

Si A est hermitienne, ses valeurs propres sont réelles. L'enveloppe convexe d'un ensemble fini de réels est simplement l'intervalle allant du plus petit au plus grand. Donc

$$\mathcal{H}(A) = [\min \sigma(A), \max \sigma(A)].$$

21) Exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prenons un vecteur unitaire du plan complexe sous la forme

$$x = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Alors

$$Ax = \begin{pmatrix} be^{i\theta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle Ax|x \rangle = abe^{i\theta}.$$

Comme $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\mathcal{H}(A) \subset \overline{D}\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Réciproquement, si $w \in \mathbb{C}$ vérifie $|w| \leq 1/2$, écrivons $w = re^{i\theta}$ avec $0 \leq r \leq 1/2$. Il existe $t \in [0, \pi/2]$ tel que $\frac{1}{2} \sin(2t) = r$. En posant

$$a = \cos t, \quad b = \sin t,$$

on a $a^2 + b^2 = 1$ et $ab = r$, donc $abe^{i\theta} = w$.

Ainsi

$$\mathcal{H}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \overline{D}\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

22) $\mathcal{H}(A)$ est fermé et borné

La sphère unité

$$S = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| = 1\}$$

est compacte. L'application

$$\Phi : x \in S \longmapsto \langle Ax|x \rangle$$

est continue. Par conséquent, son image $\Phi(S) = \mathcal{H}(A)$ est compacte dans \mathbb{C} . Elle est donc fermée et bornée.

$$\mathcal{H}(A) \text{ est un compact de } \mathbb{C}.$$

23) Encadrement de $r(A)$ par $\|A\|$

Majoration. Pour tout x unitaire,

$$|\langle Ax|x \rangle| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\|.$$

En prenant le maximum sur les x unitaires,

$$r(A) \leq \|A\|.$$

Minoration. Pour x, y unitaires, l'identité de polarisation donnée dans l'énoncé fournit

$$4 \langle Ax|y \rangle = \langle A(x+y)|x+y \rangle - \langle A(x-y)|x-y \rangle \\ + i \langle A(x+iy)|x+iy \rangle - i \langle A(x-iy)|x-iy \rangle.$$

En prenant les modules,

$$4 |\langle Ax|y \rangle| \leq |\langle A(x+y)|x+y \rangle| + |\langle A(x-y)|x-y \rangle| \\ + |\langle A(x+iy)|x+iy \rangle| + |\langle A(x-iy)|x-iy \rangle|.$$

Pour tout $u \neq 0$,

$$|\langle Au|u \rangle| = \|u\|^2 |\langle A(u/\|u\|)|u/\|u\| \rangle| \leq r(A) \|u\|^2.$$

On en déduit

$$4 |\langle Ax|y \rangle| \leq r(A) (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2).$$

Or, pour x, y unitaires,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4, \quad \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2 = 4,$$

donc

$$|\langle Ax|y \rangle| \leq 2r(A).$$

Enfin, pour tout x unitaire,

$$\|Ax\| = \max_{\|y\|=1} |\langle Ax|y \rangle|,$$

d'où, en prenant le supremum sur x ,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Ax|y \rangle| \leq 2r(A).$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{1}{2} \|A\| \leq r(A) \leq \|A\| .}$$

24) Le rayon numérique est une norme

Positivité et homogénéité. Immédiates : $r(A) \geq 0$ et, pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$r(\lambda A) = \max_{\|x\|=1} |\langle \lambda Ax|x \rangle| = |\lambda| r(A).$$

Séparation. Supposons $r(A) = 0$. Alors, pour tout x unitaire,

$$\langle Ax|x \rangle = 0.$$

Par homogénéité, ceci reste vrai pour tout $x \in \mathbb{C}^n$. En appliquant l'identité de polarisation, on obtient pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle Ax|y \rangle = 0.$$

Donc $Ax = 0$ pour tout x , soit $A = 0$.

Inégalité triangulaire. Pour tout x unitaire,

$$|\langle (A+B)x|x \rangle| \leq |\langle Ax|x \rangle| + |\langle Bx|x \rangle| \leq r(A) + r(B).$$

En prenant le maximum sur la sphère unité,

$$r(A+B) \leq r(A) + r(B).$$

Tous les axiomes d'une norme sont donc vérifiés :

$$\boxed{r : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ est une norme.}}$$

25) Contre-exemple à la sous-multiplicativité

Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la question 21,

$$r(A) = r(B) = \frac{1}{2}.$$

Mais

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est hermitienne, donc sa valeur maximale de $|\langle ABx|x \rangle|$ est son plus grand autovaleur, à savoir 1 ; autrement dit

$$r(AB) = 1.$$

Ainsi

$$1 = r(AB) > \frac{1}{4} = r(A)r(B).$$

Donc l'inégalité $r(AB) \leq r(A)r(B)$ est fautive en général.

26-a) Deux identités polynomiales

On part de

$$X^k - 1 = \prod_{\ell=1}^k (X - \omega_k^\ell).$$

En remplaçant X par $1/X$ puis en multipliant par X^k , on obtient

$$1 - X^k = \prod_{\ell=1}^k (1 - \omega_k^\ell X).$$

Ensuite, en dérivant $X^k - 1 = \prod_{\ell=1}^k (X - \omega_k^\ell)$, on obtient

$$kX^{k-1} = \sum_{j=1}^k \prod_{\ell \neq j} (X - \omega_k^\ell).$$

En remplaçant à nouveau X par $1/X$ et en multipliant par X^{k-1} , il vient

$$k = \sum_{j=1}^k \prod_{\ell \neq j} (1 - \omega_k^\ell X).$$

Donc

$$1 - X^k = \prod_{\ell=1}^k (1 - \omega_k^\ell X), \quad 1 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \prod_{\ell \neq j} (1 - \omega_k^\ell X).$$

26-b) Formule fondamentale

On définit

$$x_j = \left(\prod_{\ell \neq j} (I - \omega_k^\ell A) \right) x, \quad 1 \leq j \leq k,$$

où x est un vecteur unitaire.

Par la seconde identité de 26-a), appliquée à A ,

$$x = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j.$$

Par la première identité,

$$(I - A^k)x = \prod_{\ell=1}^k (I - \omega_k^\ell A)x = (I - \omega_k^j A)x_j \quad (1 \leq j \leq k).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 1 - \langle A^k x | x \rangle &= \langle (I - A^k)x | x \rangle \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \langle (I - A^k)x | x_j \rangle \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \langle (I - \omega_k^j A)x_j | x_j \rangle \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j | x_j \rangle). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j | x_j \rangle] = 1 - \langle A^k x | x \rangle.}$$

26-c) Cas $r(A) \leq 1$

Supposons $r(A) \leq 1$. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et x unitaire. Appliquons la formule de 26-b) à la matrice $e^{i\theta}A$: on obtient

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j e^{i\theta} A x_j | x_j \rangle] = 1 - e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle.$$

Prenons les parties réelles. Pour chaque j ,

$$\Re(\|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j e^{i\theta} A x_j | x_j \rangle) = \|x_j\|^2 (1 - \Re \langle \omega_k^j e^{i\theta} A u_j | u_j \rangle),$$

où $u_j = x_j / \|x_j\|$ si $x_j \neq 0$. Comme $\omega_k^j e^{i\theta}$ est de module 1,

$$r(\omega_k^j e^{i\theta} A) = r(A) \leq 1,$$

donc

$$|\langle \omega_k^j e^{i\theta} A u_j | u_j \rangle| \leq 1 \implies \Re \langle \omega_k^j e^{i\theta} A u_j | u_j \rangle \leq 1.$$

Chaque terme de la somme a donc une partie réelle positive ou nulle. Par conséquent,

$$\Re(1 - e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle) \geq 0.$$

Autrement dit,

$$\Re(e^{-ik\theta} \langle A^k x | x \rangle) \leq 1.$$

Choisissons maintenant θ tel que

$$e^{-ik\theta} \langle A^k x | x \rangle = |\langle A^k x | x \rangle|.$$

On obtient alors

$$\left| \langle A^k x | x \rangle \right| \leq 1.$$

Le vecteur unitaire x étant arbitraire,

$$\boxed{r(A) \leq 1 \implies r(A^k) \leq 1.}$$

26-d) Inégalité générale $r(A^k) \leq r(A)^k$

Si $A = 0$, c'est trivial. Sinon, posons

$$B = \frac{A}{r(A)}.$$

Comme r est une norme (question 24), on a $r(B) = 1$. D'après 26-c),

$$r(B^k) \leq 1.$$

Par homogénéité de r ,

$$r(A^k) = r(r(A)^k B^k) = r(A)^k r(B^k) \leq r(A)^k.$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad r(A^k) \leq r(A)^k.}$$

D - Conjecture de Crouzeix

On cherche à comprendre l'inégalité

$$\|p(A)\| \leq 2 \|p\|_{\mathcal{H}(A)}.$$

27) La constante 2 ne peut pas être améliorée

Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p(X) = X.$$

Alors, par la question 21,

$$\mathcal{H}(A) = \overline{D} \left(0, \frac{1}{2} \right), \quad \|p\|_{\mathcal{H}(A)} = \frac{1}{2}.$$

D'autre part,

$$\|p(A)\| = \|A\| = 1$$

(car $Ae_2 = e_1$). Donc

$$\frac{\|p(A)\|}{\|p\|_{\mathcal{H}(A)}} = 2.$$

Ainsi, si l'on remplaçait 2 par une constante strictement plus petite, l'inégalité échouerait pour ce couple (A, p) . On en conclut :

$$\boxed{\text{la constante 2 est optimale.}}$$

28) Vérification pour les monômes

Soit $p(X) = X^k$ avec $k \geq 0$. Alors

$$\|p(A)\| = \|A^k\|.$$

Par la question 23,

$$\|A^k\| \leq 2r(A^k).$$

Puis, par la question 26,

$$r(A^k) \leq r(A)^k.$$

Enfin,

$$\|p\|_{\mathcal{H}(A)} = \max_{z \in \mathcal{H}(A)} |z|^k = r(A)^k.$$

D'où

$$\|p(A)\| \leq 2r(A)^k = 2\|p\|_{\mathcal{H}(A)}.$$

Ainsi la conjecture est vraie pour les monômes :

$$\boxed{\|A^k\| \leq 2\|X^k\|_{\mathcal{H}(A)}}.$$

29) Un cas favorable sur les coefficients

On suppose qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$c_k = |c_k| e^{i(\varphi - k\theta)} \quad (0 \leq k \leq r),$$

où $z = r(A)e^{i\theta} \in \mathcal{H}(A)$.

Alors

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{k=0}^r c_k z^k = \sum_{k=0}^r |c_k| e^{i(\varphi - k\theta)} (r(A)e^{i\theta})^k \\ &= e^{i\varphi} \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|p(z)| = \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k.$$

D'autre part, par linéarité puis par la question 28,

$$\begin{aligned} \|p(A)\| &\leq \sum_{k=0}^r |c_k| \|A^k\| \leq 2 \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k \\ &= 2|p(z)| \leq 2\|p\|_{\mathcal{H}(A)}, \end{aligned}$$

puisque $z \in \mathcal{H}(A)$.

On a donc bien

$$\boxed{\|p(A)\| \leq 2\|p\|_{\mathcal{H}(A)}}.$$

30-a) Conséquence du résultat d'Okubo-Ando

Si $r(A) = 0$, alors $A = 0$ par la question 24 et le résultat est trivial. Supposons donc $r(A) > 0$ et posons

$$B = \frac{A}{r(A)}.$$

Alors $r(B) = 1$. Le résultat d'Okubo-Ando fournit une matrice inversible X telle que

$$\text{cond}(X) \leq 2 \quad \text{et} \quad C := X^{-1}BX$$

soit une contraction.

Pour un polynôme p , posons

$$q(X) = p(r(A)X).$$

Alors $q(B) = p(A)$ et, comme $B = XCX^{-1}$,

$$p(A) = q(B) = Xq(C)X^{-1}.$$

Par sous-multiplicativité,

$$\|p(A)\| \leq \|X\| \|q(C)\| \|X^{-1}\| \leq \text{cond}(X) \|q(C)\|.$$

Comme C est une contraction, l'inégalité de Von Neumann (question 16) donne

$$\|q(C)\| \leq \|q\|_{\mathbb{D}}.$$

Donc

$$\|p(A)\| \leq 2 \|q\|_{\mathbb{D}} = 2 \sup_{|z| \leq 1} |p(r(A)z)| = 2 \|p\|_{\overline{D}(0, r(A))}.$$

Ainsi

$$\boxed{\|p(A)\| \leq 2 \|p\|_{\overline{D}(0, r(A))}}.$$

30-b) Passage à tout disque contenant $\mathcal{H}(A)$

Soit $\Delta = \overline{D}(a, R)$ un disque fermé contenant $\mathcal{H}(A)$, et soit $\Gamma = \partial\Delta$ son bord. Considérons la matrice

$$B = A - aI_n.$$

Alors, pour tout x unitaire,

$$\langle Bx|x \rangle = \langle Ax|x \rangle - a,$$

d'où

$$\mathcal{H}(B) = \mathcal{H}(A) - a \subset \overline{D}(0, R).$$

En particulier,

$$r(B) \leq R.$$

Appliquons 30-a) à B et au polynôme $q(X) = p(X + a)$:

$$\|p(A)\| = \|q(B)\| \leq 2 \|q\|_{\overline{D}(0, R)}.$$

Or

$$\|q\|_{\overline{D}(0, R)} = \|p\|_{\overline{D}(a, R)} = \|p\|_{\Delta}.$$

Enfin, la question 10 appliquée au compact Δ donne

$$\|p\|_{\Delta} = \|p\|_{\Gamma}.$$

Par conséquent,

$$\|p(A)\| \leq 2 \|p\|_{\Gamma}.$$

Bilan. Le sujet conduit, par étapes, de l'inégalité de Von Neumann à des résultats de plus en plus fins sur le rayon numérique et sur la conjecture de Crouzeix. Les points-clés sont :

- la construction de matrices unitaires auxiliaires ;
- le passage du disque unité au rayon numérique ;
- l'utilisation de la similitude fournie par Okubo-Ando pour gagner un facteur 2.