Correction détaillée

X-ENS 2026 – MP-MPI – Mathématiques B

Thèmes : sommes de Riemann, matrices tridiagonales, approximation de Weierstrass et loi du demi-cercle

Remarque. On suit les notations du sujet. Lorsque c'est commode, on pose aussi $\chi_0 = 1$ et $\chi_1(X) = X$, ce qui prolonge naturellement la récurrence satisfaite par les polynômes caractéristiques.

Préliminaire

1) Résolution de la récurrence $u_n = \alpha u_{n-1} - u_{n-2}$

Le polynôme caractéristique est
$$r^2 - \alpha r + 1 = 0.$$

Cas $|\alpha| > 2$. Posons $\Delta = \alpha^2 - 4 > 0$. Les racines sont
$$r_\pm = \frac{\alpha \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad r_+ \neq r_-.$$

Toute solution est de la forme $u_n = A r_+^n + B r_-^n$. Les conditions initiales donnent
$$A + B = 0, \qquad A r_+ + B r_- = 1,$$
donc
$$A = \frac{1}{r_+ - r_-} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4}}, \qquad B = -A.$$
Ainsi
$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-4}} \left[\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2-4}}{2} \right)^n - \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2-4}}{2} \right)^n \right].}$$

Cas $|\alpha| < 2$. Il existe un unique $\theta \in (0, \pi)$ tel que $\alpha = 2\cos\theta$. Les racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, donc
$$u_n = A e^{in\theta} + B e^{-in\theta}.$$

De $u_0 = 0$ on tire $B = -A$, puis de $u_1 = 1$,
$$A(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 1.$$

Comme $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin\theta$, on obtient
$$\boxed{u_n = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}, \qquad \alpha = 2\cos\theta.}$$

Cas $\alpha = 2$. La racine caractéristique double vaut 1, donc $u_n = A + Bn$. Avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on trouve
$$\boxed{u_n = n.}$$

Cas $\alpha = -2$. La racine double vaut -1, donc $u_n = (A + Bn)(-1)^n$. Avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on obtient
$$\boxed{u_n = (-1)^{n-1} n.}$$

Première partie

2) Les suites v_n et w_n ont la même limite

Posons
$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
Comme f est continue sur $[0,1]$, elle est uniformément continue. Si l'on note
$$\omega_f(\delta) = \sup\left\{|f(x)-f(y)|\ ;\ x,y\in[0,1],\ |x-y|\le\delta\right\},$$
alors $\omega_f(\delta)\to 0$ quand $\delta\to 0$.

Pour tout $n\ge 1$,
$$|v_n - s_n| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_f\left(\left|\frac{k}{n+1}-\frac{k}{n}\right|\right) \le \omega_f\left(\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
car $|k/(n+1)-k/n| = k/(n(n+1)) \le 1/(n+1)$.

De même,
$$|w_n - s_n| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega_f\left(\left|\frac{2k}{2n+1}-\frac{k}{n}\right|\right) \le \omega_f\left(\frac{1}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
car $|2k/(2n+1)-k/n| = k/(n(2n+1)) \le 1/(2n+1)$.

Enfin, (s_n) est une somme de Riemann classique, donc
$$s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Par suite,
$$\boxed{v_n \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad w_n \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

3a) L'intégrale $I(f)$ et le changement de variable $x = 2\cos\theta$

Pour $0<\delta<\pi/2$, le changement de variable $x=2\cos\theta$ sur $[\delta,\pi-\delta]$ donne
$$\frac{1}{\pi}\int_{-2\cos\delta}^{2\cos\delta}\frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi-\delta} f(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$
La fonction $\theta\mapsto f(2\cos\theta)$ est continue sur $[0,\pi]$, donc intégrable. En faisant tendre δ vers 0, on obtient
$$\boxed{I(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.}$$
En particulier, l'intégrale définissant $I(f)$ est convergente.

3b) Calcul de $I(f_n)$ pour $n = 0, 1, 2$

On rappelle que $f_n(x) = x^n$. On a
$$I(f_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}\theta = 1, \qquad I(f_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0,$$
et
$$I(f_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 2.$$
Donc
$$\boxed{I(f_0) = 1, \qquad I(f_1) = 0, \qquad I(f_2) = 2.}$$

3c) Calcul général de $I(f_n)$

Si n est impair, la fonction $\theta \mapsto (2\cos\theta)^n$ est antisymétrique par rapport à $\pi/2$, donc

$$I(f_n) = 0.$$

Si $n = 2m$ est pair, alors

$$I(f_{2m}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\theta)^{2m}\,\mathrm{d}\theta.$$

Or

$$(2\cos\theta)^{2m} = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^{2m} = \sum_{r=0}^{2m}\binom{2m}{r}e^{i(2m-2r)\theta}.$$

En intégrant de 0 à π, tous les termes de fréquence non nulle s'annulent et seul reste le terme $r = m$. On obtient donc

$$\int_0^\pi (2\cos\theta)^{2m}\,\mathrm{d}\theta = \pi\binom{2m}{m}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{I(f_{2m+1}) = 0, \qquad I(f_{2m}) = \binom{2m}{m}.}$$

4a) Limite de $\mathbb{E}\Big(f\left(2\cos\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\Big)$

Posons

$$g(t) = f(2\cos(\pi t)), \qquad t \in [0,1].$$

La fonction g est continue sur $[0,1]$. Comme U_n est uniforme sur $\{1,\dots,n\}$,

$$\mathbb{E}\left(f\left(2\cos\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n+1}\right).$$

La question 2 donne donc

$$\mathbb{E}\left(f\left(2\cos\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

D'après 3a,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(f\left(2\cos\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x.}$$

4b) Fonction de répartition limite

Fixons $y \in [-2,2]$.

Si $y = -2$, la probabilité vaut toujours 0, ce qui coïncide avec l'intégrale annoncée. Supposons désormais $y > -2$ et posons

$$\theta_y = \arccos\left(\frac{y}{2}\right) \in [0,\pi).$$

Comme cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$,

$$2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y \iff \frac{\pi U_n}{n+1} > \theta_y \iff U_n > \frac{n+1}{\pi}\theta_y.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right) = \frac{\#\left\{k \in \{1,\dots,n\}\,;\; k > \frac{n+1}{\pi}\theta_y\right\}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{\theta_y}{\pi}.$$

Or, par le même changement de variable que dans 3a,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{y} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_y}^{\pi} \mathrm{d}\theta = 1 - \frac{\theta_y}{\pi}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{y} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}.}$$

Deuxième partie

5a) Cas $n = 2$ et $n = 3$

Pour $n = 2$,

$$XI_2 - T_2 = \begin{pmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{pmatrix}, \qquad \chi_2(X) = X^2 - 1.$$

Les valeurs propres sont donc -1 et 1, chacune simple :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T_2) = \{(-1,1),(1,1)\}.}$$

Pour $n = 3$,

$$XI_3 - T_3 = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{pmatrix},$$

et

$$\chi_3(X) = X(X^2-1) - X = X^3 - 2X = X(X^2-2).$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T_3) = \{(-\sqrt{2},1),(0,1),(\sqrt{2},1)\}.}$$

5b) Récurrence satisfaite par χ_n

En développant $\chi_n(X) = \det(XI_n - T_n)$ suivant la première ligne, on obtient, pour tout $n \geq 2$,

$$\chi_n(X) = X\chi_{n-1}(X) - \chi_{n-2}(X),$$

avec la convention $\chi_0 = 1$ et $\chi_1(X) = X$. En particulier, pour $n \geq 4$,

$$\boxed{\chi_n(X) = X\chi_{n-1}(X) - \chi_{n-2}(X).}$$

5c) Formule explicite de $\chi_n(\alpha)$ pour $|\alpha| < 2$

Fixons $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| < 2$. Posons $v_n = \chi_n(\alpha)$. Alors

$$v_n = \alpha v_{n-1} - v_{n-2}, \qquad v_0 = 1, \quad v_1 = \alpha.$$

Le polynôme caractéristique est $r^2 - \alpha r + 1$, dont les racines distinctes sont

$$r_\pm = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-4}}{2} = \frac{\alpha \pm i\sqrt{4-\alpha^2}}{2}.$$

Comme au préliminaire, on obtient alors

$$v_n = \frac{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}{r_+ - r_-}.$$

Or

$$r_+ - r_- = i\sqrt{4-\alpha^2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$,

$$\boxed{\chi_n(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{4-\alpha^2}} \left[\left(\frac{\alpha + i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha - i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} \right].}$$

(Le choix de la racine carrée n'importe pas : changer $\sqrt{4-\alpha^2}$ en son opposé échange les deux termes entre crochets et change aussi le signe du dénominateur.)

5d) Coefficients exacts de χ_n

On a la formule fermée

$$\boxed{\chi_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} X^{n-2k}.}$$

Preuve par récurrence. Pour $n = 0$ et $n = 1$, cela donne bien $\chi_0 = 1$ et $\chi_1 = X$. Supposons la formule vraie aux rangs $n-1$ et $n-2$. Alors

$$X\chi_{n-1}(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} X^{n-2k},$$

et, après réindexation,

$$\chi_{n-2}(X) = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{k-1} \binom{n-1-k}{k-1} X^{n-2k}.$$

Par 5b,

$$\chi_n(X) = X\chi_{n-1}(X) - \chi_{n-2}(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \left[\binom{n-1-k}{k} + \binom{n-1-k}{k-1} \right] X^{n-2k}.$$

La formule de Pascal donne alors le résultat annoncé.

6) Valeurs propres de T_n

Pour $\theta \in (0, \pi)$, la formule de 5c se réécrit, avec $\alpha = 2\cos\theta$,

$$\chi_n(2\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

Les racines de χ_n sont donc les nombres

$$2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

car $\sin((n+1)\theta) = 0$ exactement pour $\theta = k\pi/(n+1)$. Ces n racines sont distinctes puisque la fonction cos est strictement décroissante sur $(0, \pi)$. On a donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T_n) = \left\{ \left(2\cos\frac{k\pi}{n+1}, 1 \right) \; ; \; k = 1, \ldots, n \right\}.}$$

7) Limite de $S_f(T_n)$

D'après la question 6,

$$S_f(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(2\cos\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

C'est exactement l'espérance de la variable $f\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)$. La question 4a donne donc immédiatement

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_f(T_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x.}$$

8a) Translation du spectre par a

On a

$$T_n(a,b,c) = aI_n + T_n(0,b,c).$$

Donc, si $(\lambda, m_\lambda) \in \mathrm{Sp}(T_n(0,b,c))$, alors $(a+\lambda, m_\lambda) \in \mathrm{Sp}(T_n(a,b,c))$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T_n(a,b,c)) = \{(a+\lambda, m_\lambda)\,;\ (\lambda, m_\lambda) \in \mathrm{Sp}(T_n(0,b,c))\}\,.}$$

8b) Réduction à $T_n(0,bc,1)$

Si $c \neq 0$. Posons

$$D = \mathrm{diag}(1, c, c^2, \ldots, c^{n-1}).$$

Alors un calcul direct montre que

$$D^{-1}T_n(0,b,c)D = T_n(0,bc,1).$$

Les deux matrices sont donc semblables et ont le même spectre.

Si $c = 0$. La matrice $T_n(0,b,0)$ est triangulaire supérieure stricte, donc son spectre est réduit à $\{0\}$. Comme alors $bc = 0$, la matrice $T_n(0,bc,1) = T_n(0,0,1)$ est triangulaire inférieure stricte, donc de spectre $\{0\}$ elle aussi.

Dans tous les cas,

$$\mathrm{Sp}(T_n(0,b,c)) = \mathrm{Sp}(T_n(0,bc,1)).$$

En combinant avec 8a, on obtient

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T_n(a,b,c)) = \{(a+\lambda, m_\lambda)\,;\ (\lambda, m_\lambda) \in \mathrm{Sp}(T_n(0,bc,1))\}\,.}$$

8c) Valeurs propres de $T_n(a,b,c)$ lorsque $bc > 0$

Posons $r = \sqrt{bc} > 0$ et

$$D = \mathrm{diag}(1, \sqrt{c/b}, (\sqrt{c/b})^2, \ldots, (\sqrt{c/b})^{n-1}).$$

Comme $c/b > 0$, la matrice D est bien définie et inversible. Un calcul direct donne

$$D^{-1}T_n(a,b,c)D = aI_n + rT_n.$$

Les valeurs propres de $T_n(a,b,c)$ sont donc celles de $aI_n + rT_n$. D'après la question 6, elles valent

$$a + 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Ainsi

$$\boxed{\lambda_k = a + 2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad k = 1, \ldots, n.}$$

Elles sont toutes réelles.

9a) Limite de $S_f(T_n(a,b,c))$

Supposons $bc > 0$ et posons $r = \sqrt{bc}$. D'après 8c,

$$S_f(T_n(a,b,c)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + 2r\cos\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Considérons la fonction continue $g(x) = f(a+rx)$ sur $[-2,2]$. On a alors

$$S_f(T_n(a,b,c)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(2\cos\frac{k\pi}{n+1}\right) = S_g(T_n).$$

La question 7 donne donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_f(T_n(a,b,c)) = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2}\frac{f(a+\sqrt{bc}\,x)}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x.}$$

9b) Équivalent de $q_n(y)$

Posons $r = \sqrt{bc}$ et $t = (y-a)/r$. D'après 8c,

$$\frac{q_n(y)}{n} = \mathbb{P}\left(a + 2r\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) \le y\right) = \mathbb{P}\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) \le t\right).$$

Remplacer $\le$ par $<$ modifie cette probabilité d'au plus $1/n$, puisque les valeurs propres sont distinctes. La question 4b donne donc

$$\frac{q_n(y)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(t) := \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{t}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}},$$

avec la convention usuelle $F(t) = 0$ si $t \le -2$ et $F(t) = 1$ si $t \ge 2$. Autrement dit,

$$\boxed{\frac{q_n(y)}{n} \longrightarrow \begin{cases} 0, & y \le a - 2\sqrt{bc}, \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-2}^{(y-a)/\sqrt{bc}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}, & a - 2\sqrt{bc} < y < a + 2\sqrt{bc}, \\ 1, & y \ge a + 2\sqrt{bc}. \end{cases}}$$

Par conséquent,

$$\boxed{q_n(y) \sim \begin{cases} 0, & y \le a - 2\sqrt{bc}, \\ \dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int_{-2}^{(y-a)/\sqrt{bc}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}, & a - 2\sqrt{bc} < y < a + 2\sqrt{bc}, \\ n, & y \ge a + 2\sqrt{bc}. \end{cases}}$$

Troisième partie

10a) Comportement de $Q_n(x) = (1-x^n)^{2^n}$

Soit $0 \le \kappa < 1/2$.

Sur $[0,\kappa]$**.** Pour $x \in [0,\kappa]$, on a $0 \le x^n \le \kappa^n$, et l'inégalité $1-(1-u)^m \le mu$ pour $u \in [0,1]$ donne

$$0 \le 1 - Q_n(x) = 1 - (1-x^n)^{2^n} \le 2^n x^n \le (2\kappa)^n.$$

Comme $2\kappa < 1$, on en déduit la convergence uniforme de Q_n vers 1 sur $[0, \kappa]$.

Sur $[1-\kappa, 1]$**.** Posons $c = 1-\kappa \in (1/2, 1]$. Pour $x \in [1-\kappa, 1]$, on a $x \geq c$, donc

$$0 \leq Q_n(x) = (1-x^n)^{2^n} \leq (1-c^n)^{2^n} \leq e^{-2^n c^n} = e^{-(2c)^n}.$$

Comme $2c > 1$, le majorant tend vers 0, donc Q_n converge uniformément vers 0 sur $[1-\kappa, 1]$.

10b) Approximation uniforme de H par P_n

Fixons $\eta \in (0, 1]$ et posons

$$\kappa = \frac{1-\eta}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

Si $x \in [\eta, 1]$, alors $(1-x)/2 \in [0, \kappa]$, donc, d'après 10a,

$$P_n(x) = Q_n\left(\frac{1-x}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = H(x)$$

uniformément sur $[\eta, 1]$.

Si $x \in [-1, -\eta]$, alors $(1-x)/2 \in [1-\kappa, 1]$, donc

$$P_n(x) = Q_n\left(\frac{1-x}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = H(x)$$

uniformément sur $[-1, -\eta]$.

Ainsi

$$\boxed{P_n \longrightarrow H \quad \text{uniformément sur } [-1,1] \setminus [-\eta, \eta].}$$

11) Approximation d'une fonction continue par une fonction en escalier

On suppose dans cette question que $f(-1) = 0$. Comme f est continue sur le segment $[-1, 1]$, elle est uniformément continue. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$|x-y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Choisissons $N \geq 1$ tel que

$$\frac{2}{N+1} \leq \delta,$$

et posons, pour $j = 0, \ldots, N+1$,

$$t_j = -1 + \frac{2j}{N+1}.$$

Pour $i = 1, \ldots, N$, définissons

$$c_i = t_i \in (-1, 1), \qquad a_i = f(t_i) - f(t_{i-1}).$$

Alors

$$|a_i| = |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \varepsilon,$$

car $t_i - t_{i-1} = 2/(N+1) \leq \delta$.

Considérons maintenant

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i H(x - c_i).$$

Si $x \in [t_m, t_{m+1}[$ avec $m \in \{0, \ldots, N\}$, alors

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i = f(t_m) - f(t_0) = f(t_m),$$

puisque $f(t_0) = f(-1) = 0$. Or $|x - t_m| \leq 2/(N+1) \leq \delta$, donc

$$|f(x) - s(x)| = |f(x) - f(t_m)| \leq \varepsilon.$$

Au point $x = 1$, on a de même $s(1) = f(t_N)$ et $|1 - t_N| \leq \delta$, donc

$$|f(1) - s(1)| \leq \varepsilon.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \qquad \left| f(x) - \sum_{i=1}^{N} a_i H(x - c_i) \right| \leq \varepsilon,}$$

avec $-1 < c_1 < \cdots < c_N < 1$ et $(a_1, \ldots, a_N) \in [-\varepsilon, \varepsilon]^N$.

12) Théorème d'approximation de Weierstrass sur $[-1,1]$

Soit $f \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Posons

$$g(x) = f(x) - f(-1).$$

Alors $g(-1) = 0$. En appliquant la question 11 à g avec la précision $\varepsilon/3$, il existe $N \geq 1$, des réels $-1 < c_1 < \cdots < c_N < 1$ et des coefficients $a_i \in [-\varepsilon/3, \varepsilon/3]$ tels que

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \left| g(x) - \sum_{i=1}^{N} a_i H(x - c_i) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Notons

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i H(x - c_i).$$

Choisissons ensuite $\eta > 0$ de sorte que les intervalles $[c_i - \eta, c_i + \eta]$ soient deux à deux disjoints. Comme $H(x - c_i) = H(\frac{x-c_i}{2})$, considérons le polynôme

$$F_n(x) = f(-1) + \sum_{i=1}^{N} a_i P_n\left(\frac{x - c_i}{2}\right).$$

Par 10b appliquée avec $\eta/2$, il existe n assez grand pour que

$$\sup_{u \in [-1,1] \setminus [-\eta/2, \eta/2]} |P_n(u) - H(u)| \leq \frac{1}{N}.$$

Fixons un tel n.

Premier cas : $x \notin \bigcup_{i=1}^{N} [c_i - \eta, c_i + \eta]$. Alors, pour tout i, $|x - c_i| \geq \eta$, donc $|(x - c_i)/2| \geq \eta/2$, et ainsi

$$\left| P_n\left(\frac{x - c_i}{2}\right) - H(x - c_i) \right| \leq \frac{1}{N}.$$

On obtient donc

$$\left| g(x) - \sum_{i=1}^{N} a_i P_n\left(\frac{x - c_i}{2}\right) \right| \leq |g(x) - s(x)| + \sum_{i=1}^{N} |a_i| \, \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{3} + N \cdot \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{N} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Second cas : $x \in [c_j - \eta, c_j + \eta]$ pour un unique j. Pour les indices $i \neq j$, on garde l'estimation précédente. Pour l'indice j, on utilise seulement le fait que $u_j = (x - c_j)/2 \in [-1,1]$, donc

$$0 \leq P_n(u_j) \leq 1,$$

puisque $(1-u_j)/2 \in [0,1]$. Par conséquent,

$$\left|P_n\left(\frac{x-c_j}{2}\right) - H(x-c_j)\right| \leq 1,$$

et donc

$$\left|g(x) - \sum_{i=1}^{N} a_i P_n\left(\frac{x-c_i}{2}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + |a_j| \leq \varepsilon.$$

Dans tous les cas,

$$\forall x \in [-1,1], \qquad |f(x) - F_n(x)| \leq \varepsilon.$$

On a donc construit un polynôme $P = F_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \qquad |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon.}$$

Quatrième partie

13a) Expression de $S_n(f_k)$ en fonction de la trace

Pour tout $\omega \in \Omega$, la matrice $X_n(\omega)$ est réelle symétrique ; elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale, avec des valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors

$$\mathrm{Tr}(X_n(\omega)^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k.$$

Par définition de S_f, on a donc

$$S_n(f_k)(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(X_n(\omega)^k).$$

Ainsi, comme égalité de variables aléatoires,

$$\boxed{S_n(f_k) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(X_n^k).}$$

13b) Calcul de $\Sigma(f_k)$

On écrit

$$\Sigma(f_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^k\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \frac{x^k(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2I(f_k) - \frac{1}{2}I(f_{k+2}).$$

D'après 3c,

- si k est impair, alors $I(f_k) = I(f_{k+2}) = 0$, donc $\Sigma(f_k) = 0$;
- si $k = 2m$, alors

$$\Sigma(f_{2m}) = 2\binom{2m}{m} - \frac{1}{2}\binom{2m+2}{m+1} = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}.$$

Ainsi

$$\boxed{\Sigma(f_{2m+1}) = 0, \qquad \Sigma(f_{2m}) = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}.}$$

13c) Vérification de (H_k) pour $0 \leq k \leq 2$

Cas $k = 0$. On a $X_n^0 = I_n$, donc

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(I_n)) = 1 = \Sigma(f_0), \qquad \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(I_n)^2) = 1 = \Sigma(f_0)^2.$$

Cas $k = 1$. Comme

$$\mathrm{Tr}(X_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} W_{i,i},$$

on a immédiatement

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(X_n)) = 0, \qquad \frac{1}{n}\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(X_n)) = 0 = \Sigma(f_1).$$

De plus, par indépendance et parce que $\mathbb{E}(W_{1,1}) = 0$,

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(X_n)^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(W_{i,i}^2) = 1.$$

Donc

$$\frac{1}{n^2}\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(X_n)^2) = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \Sigma(f_1)^2.$$

Cas $k = 2$. On utilise la symétrie de X_n :

$$\mathrm{Tr}(X_n^2) = \sum_{i,j=1}^{n}(X_n)_{i,j}(X_n)_{j,i} = \sum_{i,j=1}^{n}(X_n)_{i,j}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} W_{i,i}^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} W_{i,j}^2\right).$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(X_n^2)) = \frac{1}{n}\left(n + 2\binom{n}{2}\right) = n,$$

d'où

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(X_n^2)) = 1 = \Sigma(f_2).$$

Pour le second moment, posons

$$T_n = \mathrm{Tr}(X_n^2) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Z_{i,j}\right),$$

où $Y_i = W_{i,i}^2$ et $Z_{i,j} = W_{i,j}^2$. Les variables Y_i et $Z_{i,j}$ sont indépendantes et ont une variance finie (puisque $W_{1,1}$ admet un moment d'ordre 4). Donc

$$\mathrm{Var}(T_n) = \frac{1}{n^2}\left(n\,\mathrm{Var}(W_{1,1}^2) + 4\binom{n}{2}\mathrm{Var}(W_{1,1}^2)\right) = O(1).$$

Comme $\mathbb{E}(T_n) = n$, on a

$$\mathbb{E}(T_n^2) = \mathrm{Var}(T_n) + \mathbb{E}(T_n)^2 = n^2 + O(1).$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{n^2}\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(X_n^2)^2) = \frac{\mathbb{E}(T_n^2)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = \Sigma(f_2)^2.$$

Ainsi (H_k) est bien vérifiée pour $k = 0, 1, 2$.

14) Contrôle de $S_n(g_{k,B})$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_{k,B}(x) = |x|^k \mathbf{1}_{|x|>B}(x) \leq \frac{|x|^{2k}}{B^k} = \frac{f_{2k}(x)}{B^k}.$$

Comme S_n est positive sur les fonctions positives,

$$0 \leq S_n(g_{k,B}) \leq \frac{1}{B^k} S_n(f_{2k}).$$

L'inégalité de Markov donne alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n(g_{k,B}))}{\varepsilon} \leq \frac{\mathbb{E}(S_n(f_{2k}))}{\varepsilon B^k}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n(f_{2k}))}{\varepsilon B^k}.}$$

15) Disparition de la masse spectrale au-delà de $B > 4$

Fixons $B > 4$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout entier $\ell \geq k$, on a sur $\{|x| > B\}$ l'inégalité $|x|^k \leq |x|^\ell$, donc

$$g_{k,B}(x) \leq g_{\ell,B}(x).$$

Il en résulte

$$\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(S_n(g_{\ell,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n(f_{2\ell}))}{\varepsilon B^\ell}$$

par la question 14. En faisant tendre n vers l'infini et en utilisant $(H_{2\ell})$, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\Sigma(f_{2\ell})}{\varepsilon B^\ell}.$$

Or, d'après 13b,

$$\Sigma(f_{2\ell}) = \frac{1}{\ell+1}\binom{2\ell}{\ell} \leq 4^\ell.$$

Donc

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{4}{B}\right)^\ell.$$

Comme $B > 4$, le membre de droite tend vers 0 lorsque $\ell \to \infty$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) = 0.}$$

16) Concentration de $S_n(f_k)$

Par 13a,

$$S_n(f_k) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(X_n^k).$$

Donc

$$\operatorname{Var}(S_n(f_k)) = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(\operatorname{Tr}(X_n^k)^2) - \left(\frac{1}{n}\mathbb{E}(\operatorname{Tr}(X_n^k))\right)^2.$$

L'hypothèse (H_k) montre que les deux termes convergent vers $\Sigma(f_k)^2$, donc

$$\operatorname{Var}(S_n(f_k)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n(f_k))}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geq \varepsilon) = 0.}$$

17a) Réduction au cas polynomial

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-B, B]$, avec $B > 4$. Fixons $\varepsilon > 0$. Appliquons la question 12 à la fonction $\widetilde{f}(t) = f(Bt)$ sur $[-1, 1]$, avec la précision $\varepsilon/8$. Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall t \in [-1, 1], \qquad \left|\widetilde{f}(t) - Q(t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

En posant

$$P(x) = Q\left(\frac{x}{B}\right),$$

on obtient un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$\forall x \in [-B, B], \qquad |f(x) - P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Comme f est nulle hors de $[-B, B]$, définissons

$$R(x) = f(x) - P(x) + P(x)\mathbf{1}_{|x|>B}(x).$$

Alors

$$f = P - P\mathbf{1}_{|x|>B} + R,$$

et, par construction,

$$\|R\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Par positivité de S_n,

$$|S_n(R)| \leq S_n(|R|) \leq \|R\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

D'autre part, par linéarité de S_n,

$$\mathbb{E}(S_n(P)) = \sum_{m=0}^{d} a_m \mathbb{E}(S_n(f_m)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{m=0}^{d} a_m \Sigma(f_m) = \Sigma(P)$$

si $P(x) = \sum_{m=0}^{d} a_m x^m$, grâce aux hypothèses (H_m). Comme la mesure Σ est supportée par $[-2, 2] \subset [-B, B]$, on a

$$|\Sigma(P) - \Sigma(f)| \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Il existe donc N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|\mathbb{E}(S_n(P)) - \Sigma(f)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Pour $n \geq N$, on écrit alors

$$S_n(f) - \Sigma(f) = \big(S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))\big) - S_n(P\mathbf{1}_{|x|>B}) + S_n(R) + \big(\mathbb{E}(S_n(P)) - \Sigma(f)\big).$$

Donc

$$|S_n(f) - \Sigma(f)| \leq |S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| + \left|S_n(P\mathbf{1}_{|x|>B})\right| + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Si les deux termes aléatoires de droite sont strictement inférieurs à $\varepsilon/4$, alors le membre de droite est strictement inférieur à $7\varepsilon/8$. Par contraposée,

$$\boxed{\forall n \geq N, \quad \mathbb{P}(|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(\left|S_n(P\mathbf{1}_{|x|>B})\right| \geq \varepsilon/4\right) + \mathbb{P}(|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geq \varepsilon/4).}$$

17b) Conclusion

Écrivons $P(x) = \sum_{m=0}^{d} a_m x^m$ et posons

$$A = 1 + \sum_{m=0}^{d} |a_m| > 0.$$

Alors

$$|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \le \sum_{m=0}^{d} |a_m| \, |S_n(f_m) - \mathbb{E}(S_n(f_m))| \,.$$

Si, pour tout m, on a $|S_n(f_m) - \mathbb{E}(S_n(f_m))| < \varepsilon/(4A)$, alors

$$|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| < \frac{\varepsilon}{4A} \sum_{m=0}^{d} |a_m| \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}\big(|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \ge \varepsilon/4\big) \le \sum_{m=0}^{d} \mathbb{P}\big(|S_n(f_m) - \mathbb{E}(S_n(f_m))| \ge \varepsilon/(4A)\big).$$

La question 16 montre que le membre de droite tend vers 0.

De même,

$$\left|S_n(P\mathbf{1}_{|x|>B})\right| \le \sum_{m=0}^{d} |a_m| \; S_n(g_{m,B}).$$

Si, pour tout m, on a $S_n(g_{m,B}) < \varepsilon/(4A)$, alors

$$\left|S_n(P\mathbf{1}_{|x|>B})\right| < \frac{\varepsilon}{4A} \sum_{m=0}^{d} |a_m| \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

Donc

$$\mathbb{P}\Big(\left|S_n(P\mathbf{1}_{|x|>B})\right| \ge \varepsilon/4\Big) \le \sum_{m=0}^{d} \mathbb{P}\big(S_n(g_{m,B}) \ge \varepsilon/(4A)\big).$$

La question 15 entraîne que ce second membre tend vers 0.

En reportant dans l'inégalité de 17a, on obtient finalement

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|S_n(f) - \Sigma(f)| \ge \varepsilon\big) = 0.}$$

Fin de la correction.