X-ENS 2026 - MP-MPI - Mathématiques D

Approximation probabilistes

Correction détaillée

Notations. Dans toute la correction, pour $\lambda > 0$, on note

$$Z \sim \mathcal{P}(\lambda), \qquad p_k = \mathbb{P}(Z = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

On rappelle que $\mathbb{E}(Z) = \lambda$ et que $kp_k = \lambda p_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.

Partie préliminaire : lois de Poisson et inégalités

Question 1

Pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{uZ}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{un}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^u)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^u} = e^{\lambda(e^u-1)}.$$

La fonction génératrice exponentielle de Z est donc

$$u \longmapsto \mathbb{E}(e^{uZ}) = e^{\lambda(e^u-1)}.$$

Question 2

(2a) Soient $u, r > 0$. Sur l'événement $\{Z \geq r\}$, on a $e^{uZ} \geq e^{ur}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(Z \geq r) = \mathbb{P}(e^{uZ} \geq e^{ur}) \leq e^{-ur}\mathbb{E}(e^{uZ}),$$

par l'inégalité de Markov.

(2b) Soit maintenant $r \geq \lambda$. Pour $u > 0$, d'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(Z \geq r) \leq \exp\big(-ur + \lambda(e^u - 1)\big).$$

On minimise le membre de droite en choisissant u tel que $\lambda e^u = r$, c'est-à-dire $u = \ln(r/\lambda) \geq 0$. On obtient alors

$$\mathbb{P}(Z \geq r) \leq \exp\big(-r\ln(r/\lambda) + r - \lambda\big) = \exp\big(-r\ln r + r\ln\lambda + r - \lambda\big).$$

(2c) Soit enfin $r \in [0, \lambda]$. Pour $u > 0$,

$$\mathbb{P}(Z \leq r) = \mathbb{P}(e^{-uZ} \geq e^{-ur}) \leq e^{ur}\mathbb{E}(e^{-uZ}) = \exp\big(ur + \lambda(e^{-u} - 1)\big).$$

On minimise en imposant $\lambda e^{-u} = r$, soit $u = \ln(\lambda/r)$ si $r > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(Z \leq r) \leq \exp\big(r\ln(\lambda/r) + r - \lambda\big) = \exp\big(-r\ln r + r\ln\lambda + r - \lambda\big).$$

Pour $r = 0$, on a simplement

$$\mathbb{P}(Z = 0) = e^{-\lambda} = \exp\big(-0\ln 0 + 0\ln\lambda + 0 - \lambda\big),$$

la formule restant valable par passage à la limite.

Question 3

Pour $k \geq 1$, la fonction $x \mapsto \ln x$ est croissante, donc

$$\sum_{j=1}^{k-1} \ln j \leq \int_1^k \ln x \, dx.$$

En ajoutant $\ln k$ aux deux membres,

$$\ln(k!) = \sum_{j=1}^{k} \ln j \leq \int_1^k \ln x \, dx + \ln k.$$

Or

$$\int_1^k \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^k = k \ln k - k + 1.$$

Donc

$$\ln(k!) \leq (k+1) \ln k - k + 1.$$

1. Opérateur de Chen-Stein et approximation poissonienne

1.1. Opérateur de Chen-Stein

On rappelle que, pour $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_\lambda f(n) = \lambda f(n+1) - n f(n).$$

Question 4

(4a) La quantité

$$\|f\|_{(\lambda)} = \mathbb{E}[|f(Z)|] = \sum_{n \geq 0} |f(n)| \, p_n$$

est bien positive. Si $\|f\|_{(\lambda)} = 0$, alors $|f(Z)| = 0$ presque sûrement, donc $f(n) = 0$ pour tout n puisque $p_n > 0$ pour tout n. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont immédiates. C'est donc une norme sur $\mathcal{G}_\lambda$.

(4b) Soit $f \in \mathcal{F}$. Comme f est bornée,

$$|\mathcal{L}_\lambda f(Z)| \leq \lambda \|f\|_\infty + Z \|f\|_\infty ,$$

et le membre de droite est intégrable car $\mathbb{E}(Z) = \lambda < \infty$. Donc $\mathcal{L}_\lambda f \in \mathcal{G}_\lambda$. De plus,

$$\|\mathcal{L}_\lambda f\|_{(\lambda)} = \mathbb{E}[|\mathcal{L}_\lambda f(Z)|] \leq \lambda \|f\|_\infty + \mathbb{E}(Z) \|f\|_\infty = 2\lambda \|f\|_\infty .$$

L'application $\mathcal{L}_\lambda : \mathcal{F} \to \mathcal{G}_\lambda$ est donc linéaire continue.

(4c) Si $f \in \mathcal{F}$ et si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec $X \in L^1$, alors

$$|\mathcal{L}_\lambda f(X)| \leq \lambda \|f\|_\infty + X \|f\|_\infty .$$

Le membre de droite est intégrable car $X \in L^1$, donc $\mathcal{L}_\lambda f(X) \in L^1$.

Question 5

(5a) Supposons d'abord que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Pour $f \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)] = \lambda \sum_{n\geq 0} p_n f(n+1) - \sum_{n\geq 0} n p_n f(n).$$

En décalant l'indice dans la première somme,

$$\lambda \sum_{n\geq 0} p_n f(n+1) = \sum_{n\geq 1} \lambda p_{n-1} f(n) = \sum_{n\geq 1} n p_n f(n),$$

car $\lambda p_{n-1} = n p_n$. Les deux termes se compensent, donc

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)] = 0.$$

Réciproquement, supposons que $\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)] = 0$ pour tout $f \in \mathcal{F}$. Pour $k \geq 0$, prenons $f = \mathbf{1}_{\{k\}}$. Alors

$$\mathcal{L}_\lambda f(n) = \lambda \mathbf{1}_{\{k-1\}}(n) - k\mathbf{1}_{\{k\}}(n),$$

avec la convention $\mathbf{1}_{\{-1\}} = 0$. L'hypothèse donne donc, pour $k \geq 1$,

$$\lambda \mathbb{P}(X = k-1) - k\mathbb{P}(X = k) = 0,$$

soit

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda}{k}\mathbb{P}(X = k-1).$$

Par récurrence,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathbb{P}(X = 0).$$

En sommant sur $k \geq 0$,

$$1 = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 0) \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(X = 0)e^{\lambda}.$$

Ainsi $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda}$, puis

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

(5b) Si $g \in \mathcal{F}$ vérifie $\mathbb{E}[g(Z)] \neq 0$ et s'il existait $f \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{L}_\lambda f = g$, alors la question 4(b) assurerait que $\mathcal{L}_\lambda f(Z) \in L^1$, donc la question 5(a) appliquée à $X = Z$ donnerait

$$0 = \mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(Z)] = \mathbb{E}[g(Z)],$$

contradiction. Une telle fonction f n'existe donc pas.

Question 6

On cherche $h_g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que

$$h_g(0) = 0, \qquad \mathcal{L}_\lambda h_g = g.$$

L'équation $\mathcal{L}_\lambda h_g = g$ s'écrit, pour tout $k \geq 0$,

$$\lambda h_g(k+1) - k h_g(k) = g(k).$$

Comme $h_g(0)$ est imposée, cette relation détermine successivement $h_g(1), h_g(2), \ldots$; l'unicité est donc immédiate.

Pour obtenir une formule explicite, on multiplie par p_k :

$$\lambda p_k h_g(k+1) - k p_k h_g(k) = p_k g(k).$$

Or $kp_k = \lambda p_{k-1}$ pour $k \geq 1$. Ainsi,

$$\lambda p_k h_g(k+1) - \lambda p_{k-1} h_g(k) = p_k g(k),$$

avec la convention $p_{-1} h_g(0) = 0$. En sommant de $j = 0$ à $j = k$, le télescopage donne

$$\lambda p_k h_g(k+1) = \sum_{j=0}^{k} p_j g(j),$$

donc

$$\boxed{h_g(k+1) = \frac{1}{\lambda \mathbb{P}(Z = k)} \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(Z = j) g(j), \qquad k \geq 0.}$$

Question 7

Supposons désormais $g \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{E}[g(Z)] = 0$. On veut montrer

$$\|h_g\|_\infty \leq e \, \|g\|_\infty .$$

La formule de la question 6 donne, pour tout $k \geq 0$,

$$h_g(k+1) = \frac{1}{\lambda p_k} \sum_{j=0}^{k} p_j g(j).$$

Comme $\sum_{j \geq 0} p_j g(j) = \mathbb{E}[g(Z)] = 0$, on a aussi

$$h_g(k+1) = -\frac{1}{\lambda p_k} \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j g(j).$$

D'où

$$|h_g(k+1)| \leq \|g\|_\infty \min\left(\frac{\mathbb{P}(Z \leq k)}{\lambda p_k}, \frac{\mathbb{P}(Z \geq k+1)}{\lambda p_k} \right).$$

Il suffit donc de majorer ce minimum par e.

Cas $k = 0$. On a

$$|h_g(1)| \leq \|g\|_\infty \min\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1 - p_0}{\lambda p_0} \right) = \|g\|_\infty \min\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{e^\lambda - 1}{\lambda} \right).$$

Si $\lambda \geq 1$, le premier terme est $\leq 1 \leq e$. Si $0 < \lambda \leq 1$, alors $(e^\lambda - 1)/\lambda \leq e - 1 < e$. Donc $|h_g(1)| \leq e \, \|g\|_\infty$.

Cas $k \geq 1$ et $k \leq \lambda$. On utilise la question 2(c) :

$$\mathbb{P}(Z \leq k) \leq \exp(-k \ln k + k \ln \lambda + k - \lambda).$$

Comme $\lambda p_k = \lambda^{k+1} e^{-\lambda}/k!$, on obtient

$$\frac{\mathbb{P}(Z \leq k)}{\lambda p_k} \leq \frac{k! e^k}{\lambda k^k}.$$

La question 3 donne
$$k! \leq e\, k^{k+1} e^{-k},$$
donc
$$\frac{\mathbb{P}(Z \leq k)}{\lambda p_k} \leq e\,\frac{k}{\lambda} \leq e.$$

Cas $k \geq \lambda$. On utilise la question 2(b) avec $r = k+1$:
$$\mathbb{P}(Z \geq k+1) \leq \exp\big(-(k+1)\ln(k+1) + (k+1)\ln\lambda + (k+1) - \lambda\big).$$
Par conséquent,
$$\frac{\mathbb{P}(Z \geq k+1)}{\lambda p_k} \leq \frac{k! e^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}.$$
En appliquant encore la question 3,
$$\frac{\mathbb{P}(Z \geq k+1)}{\lambda p_k} \leq e^2 \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} = e^2\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \leq e^2 \cdot e^{-1} = e.$$
Dans tous les cas,
$$|h_g(k+1)| \leq e\, \|g\|_\infty .$$
Comme $h_g(0) = 0$, on conclut bien que
$$\boxed{\|h_g\|_\infty \leq e\, \|g\|_\infty .}$$

Question 8

Soit $A \subset \mathbb{N}$ et posons
$$g_A(n) = \mathbf{1}_A(n) - \mathbb{P}(Z \in A).$$
Alors $g_A \in \mathcal{F}$, $\|g_A\|_\infty \leq 1$ et
$$\mathbb{E}[g_A(Z)] = \mathbb{P}(Z \in A) - \mathbb{P}(Z \in A) = 0.$$
Soit h_A la solution de l'équation de Stein
$$\mathcal{L}_\lambda h_A = g_A, \qquad h_A(0) = 0.$$
La question 7 donne $\|h_A\|_\infty \leq e$. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Z \in A) = \mathbb{E}[g_A(X)] = \mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda h_A(X)].$$
En posant $f_A = h_A/e$, on a $\|f_A\|_\infty \leq 1$ et
$$|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Z \in A)| = e\,|\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f_A(X)]| \leq e \sup\left\{|\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)]| : f \in \mathcal{F},\ \|f\|_\infty \leq 1\right\}.$$
En prenant le supremum sur $A \subset \mathbb{N}$, on obtient
$$\boxed{\sup_{A\subset\mathbb{N}} |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Z \in A)| \leq e \sup\left\{|\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)]| : f \in \mathcal{F},\ \|f\|_\infty \leq 1\right\}.}$$

1.2. Sommes de variables aléatoires et approximation poissonienne

On note ici
$$B_1 = \sum_{i=1}^N p_i^2, \qquad \lambda = \sum_{i=1}^N p_i, \qquad W = \sum_{i=1}^N X_i, \qquad W_i = \sum_{j\neq i} X_j.$$

1.2.1. Variables aléatoires indépendantes

Question 9. (9a) On part de

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] = \lambda \mathbb{E}[f(W+1)] - \mathbb{E}[Wf(W)] = \sum_{i=1}^{N} p_i \mathbb{E}[f(W+1)] - \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[X_i f(W)].$$

Or $W = W_i + X_i$ et, par indépendance de X_i et W_i,

$$\mathbb{E}[X_i f(W)] = \mathbb{E}[X_i f(W_i+1)] = p_i \mathbb{E}[f(W_i+1)].$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] = \sum_{i=1}^{N} p_i \mathbb{E}\big[f(W+1) - f(W_i+1)\big].}$$

(9b) Soit $f \in \mathcal{F}$ avec $\|f\|_\infty \leq 1$. D'après (9a),

$$|\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)]| \leq \sum_{i=1}^{N} p_i \mathbb{E}\big[|f(W+1) - f(W_i+1)|\big].$$

Comme $W = W_i + X_i$, la différence est nulle si $X_i = 0$ et de module au plus 2 si $X_i = 1$. Donc

$$|\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)]| \leq \sum_{i=1}^{N} 2 p_i \mathbb{E}[X_i] = 2 \sum_{i=1}^{N} p_i^2 = 2B_1.$$

La question 8 donne alors

$$\boxed{\sup_{A \subset \mathbb{N}} |\mathbb{P}(W \in A) - \mathbb{P}(Z \in A)| \leq 2eB_1.}$$

Question 10

On applique la question 9(b) au cas où les X_i sont i.i.d. de loi de Bernoulli(λ/n). Alors

$$W = Y_n, \qquad B_1 = n\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{n}.$$

Donc, pour tout $A \subset \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{P}(Y_n \in A) - \mathbb{P}(Z \in A)| \leq 2e\frac{\lambda^2}{n}.$$

En choisissant $A = \{k\}$, on obtient

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \forall k \geq 0, \qquad \left|\mathbb{P}(Y_n = k) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right| \leq \frac{2e\lambda^2}{n}.}$$

1.2.2. Variables aléatoires dépendantes

Remarque importante. L'énoncé, tel qu'il est écrit, définit D_i par la non-indépendance deux à deux. Pour démontrer les questions 11 et 12, il faut en réalité l'hypothèse locale usuelle de Chen-Stein : *pour tout i, la variable X_i est indépendante de la famille $(X_j)_{j \notin D_i \cup \{i\}}$*, ce qui implique en particulier l'indépendance de X_i et S_i. C'est sous cette lecture standard que l'on rédige la suite.

Question 11. On écrit

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] = \sum_{i=1}^{N} \Big(p_i \mathbb{E}[f(W+1)] - \mathbb{E}[X_i f(W)] \Big).$$

Or $W = S_i + T_i + X_i$, donc

$$\mathbb{E}[X_i f(W)] = \mathbb{E}[X_i f(S_i + T_i + 1)].$$

On ajoute et retranche $p_i \mathbb{E}[f(S_i+1)]$:

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] = \sum_{i=1}^{N} \Big(p_i \mathbb{E}[f(W+1) - f(S_i+1)] + p_i \mathbb{E}[f(S_i+1)] - \mathbb{E}[X_i f(S_i+T_i+1)] \Big).$$

Comme X_i est indépendante de S_i,

$$\mathbb{E}[X_i f(S_i+1)] = p_i \mathbb{E}[f(S_i+1)].$$

Donc

$$p_i \mathbb{E}[f(S_i+1)] - \mathbb{E}[X_i f(S_i+T_i+1)] = -\mathbb{E}\Big[X_i \big(f(S_i+T_i+1) - f(S_i+1) \big) \Big].$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] = \sum_{i=1}^{N} \left(p_i \mathbb{E}[f(W+1) - f(S_i+1)] - \mathbb{E}\Big[X_i \big(f(S_i+T_i+1) - f(S_i+1) \big) \Big] \right).}$$

Question 12. Soit $f \in \mathcal{F}$ avec $\|f\|_\infty \leq 1$. À partir de la formule de la question 11,

$$|\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)]| \leq \sum_{i=1}^{N} (A_i + B_i),$$

où

$$A_i = p_i \mathbb{E}[|f(W+1) - f(S_i+1)|], \qquad B_i = \mathbb{E}\Big[X_i \, |f(S_i+T_i+1) - f(S_i+1)| \Big].$$

Comme $W = S_i + T_i + X_i$, la différence dans A_i est nulle si $T_i + X_i = 0$ et est de module au plus 2 sinon. Donc

$$A_i \leq 2p_i \mathbb{P}(T_i + X_i \geq 1) \leq 2p_i \mathbb{E}[T_i + X_i] = 2p_i \left(\sum_{j \in D_i} p_j + p_i \right).$$

En sommant,

$$\sum_{i=1}^{N} A_i \leq 2B_2 + 2B_1.$$

De même, la différence dans B_i est nulle si $T_i = 0$, donc

$$B_i \leq 2\mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{\{T_i \geq 1\}}] \leq 2\mathbb{E}[X_i T_i] = 2 \sum_{j \in D_i} \mathbb{E}[X_i X_j] = 2 \sum_{j \in D_i} p_{ij}.$$

En sommant,

$$\sum_{i=1}^{N} B_i \leq 2B_3.$$

Ainsi,

$$|\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)]| \leq 2(B_1 + B_2 + B_3).$$

La question 8 fournit alors

$$\boxed{\sup_{A \subset \mathbb{N}} |\mathbb{P}(W \in A) - \mathbb{P}(Z \in A)| \leq 2e(B_1 + B_2 + B_3).}$$

2. Inégalités de concentration

2.1. Espérance conditionnelle

Question 13. Pour $y \in F$, on rappelle que

$$\phi(y) = \begin{cases} \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x \mid Y = y), & \text{si } y \in F_Y, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition, $\mathbb{E}[X \mid Y] = \phi(Y)$.

(13a) Si $X \geq 0$ presque sûrement, alors tous les termes $x\mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$ sont positifs ; donc $\phi(y) \geq 0$ pour tout $y \in F_Y$, et $\phi(y) = 0$ sinon. Ainsi

$$\mathbb{E}[X \mid Y] \geq 0 \qquad \text{presque sûrement.}$$

(13b) Comme E est borné, il existe $M > 0$ tel que $|x| \leq M$ pour tout $x \in E$. Alors $|\phi(y)| \leq M$ pour tout y, donc $\mathbb{E}[X \mid Y]$ est bornée, a fortiori intégrable. Ensuite,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \sum_{y \in F} \phi(y)\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y \in F_Y} \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x \mid Y = y)\mathbb{P}(Y = y).$$

Par définition de la probabilité conditionnelle,

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y)\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y),$$

donc

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \sum_{y \in F_Y} \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}[X].$$

(13c) Soit $g : E \to \mathbb{R}$ bornée. Pour $x \in E$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$,

$$\mathbb{E}[g(X) \mid X = x] = \sum_{t \in E} g(t)\mathbb{P}(X = t \mid X = x) = g(x).$$

Donc $\mathbb{E}[g(X) \mid X] = g(X)$ presque sûrement.

(13d) Soit $h : F \to \mathbb{R}$ bornée. Pour $y \in F_Y$,

$$\mathbb{E}[h(Y)X \mid Y = y] = h(y) \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = h(y)\phi(y).$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}[h(Y)X \mid Y] = h(Y)\mathbb{E}[X \mid Y] \qquad \text{presque sûrement.}}$$

Question 14. **(14a)** Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $y \in F_Y$,

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \mathbb{P}(X = x).$$

Donc

$$\phi(y) = \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}[X],$$

et par conséquent

$$\boxed{\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X] \qquad \text{presque sûrement.}}$$

(14b) Si Z est indépendante de (X, Y), alors pour $y \in F_Y$,

$$\mathbb{E}[XZ \mid Y = y] = \sum_{x \in E} \sum_{z \in E'} xz\mathbb{P}(X = x, Z = z \mid Y = y).$$

Or l'indépendance de Z et (X,Y) donne

$$\mathbb{P}(X=x, Z=z \mid Y=y) = \mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\mathbb{P}(Z=z).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}[XZ \mid Y=y] = \left(\sum_{z\in E'} z\mathbb{P}(Z=z)\right)\left(\sum_{x\in E} x\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\right) = \mathbb{E}[Z]\,\phi(y).$$

D'où

$$\boxed{\mathbb{E}[XZ \mid Y] = \mathbb{E}[Z]\,\mathbb{E}[X \mid Y] \qquad \text{presque sûrement.}}$$

(14c) Par linéarité de la somme définissant l'espérance conditionnelle discrète,

$$\boxed{\mathbb{E}[X+\lambda Z \mid Y] = \mathbb{E}[X \mid Y] + \lambda\mathbb{E}[Z \mid Y] \qquad \text{presque sûrement.}}$$

2.2. Un énoncé abstrait

On suppose dans toute cette partie que (W,W') est un couple échangeable à valeurs dans un ensemble dénombrable E, que $F : E^2 \to \mathbb{R}$ est bornée et antisymétrique, et que

$$\mathbb{E}[F(W,W') \mid W] = \phi(W).$$

Question 15. Pour toute fonction bornée $h : E \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[h(W)\phi(W)] = \mathbb{E}\big[h(W)\mathbb{E}(F(W,W') \mid W)\big] = \mathbb{E}[h(W)F(W,W')].$$

De plus, par échangeabilité de (W,W') et antisymétrie de F,

$$\mathbb{E}[h(W')F(W,W')] = \mathbb{E}[h(W)F(W',W)] = -\mathbb{E}[h(W)F(W,W')].$$

En additionnant,

$$2\mathbb{E}[h(W)F(W,W')] = \mathbb{E}\big[(h(W)-h(W'))F(W,W')\big].$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}[h(W)\phi(W)] = \mathbb{E}[h(W)F(W,W')] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[(h(W)-h(W'))F(W,W')\big].}$$

En prenant $h \equiv 1$, on obtient

$$\boxed{\mathbb{E}[\phi(W)] = 0.}$$

Question 16. On note

$$\Delta(W) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\big(\big|(\phi(W)-\phi(W'))F(W,W')\big| \mid W\big), \qquad m(\theta) = \mathbb{E}\big[e^{\theta\phi(W)}\big].$$

On suppose qu'il existe $B, C \geq 0$ tels que presque sûrement

$$\Delta(W) \leq B\phi(W) + C.$$

(16a) Comme F est bornée, on a $|\phi(W)| \leq \|F\|_\infty$, donc $m(\theta) < \infty$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. La fonction $\theta \mapsto e^{\theta\phi(W)}$ étant dominée par $e^{|\theta|\|F\|_\infty}$, le théorème de dérivation sous le signe espérance donne

$$m'(\theta) = \mathbb{E}\big[\phi(W)e^{\theta\phi(W)}\big].$$

On applique la question 15 à la fonction bornée $h(x) = e^{\theta\phi(x)}$:

$$m'(\theta) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[(e^{\theta\phi(W)} - e^{\theta\phi(W')})F(W,W')\Big].$$

Ainsi

$$\boxed{m'(\theta) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[(e^{\theta\phi(W)} - e^{\theta\phi(W')})F(W,W')\Big].}$$

(16b) Soit $\theta > 0$. Comme m est convexe et $m'(0) = \mathbb{E}[\phi(W)] = 0$, on a $m'(\theta) \geq 0$. Or, pour tous réels x, y,

$$|e^x - e^y| = |x-y| \left| \int_0^1 e^{tx+(1-t)y}\, dt \right| \leq \frac{|x-y|}{2}(e^x + e^y),$$

par convexité de l'exponentielle. En appliquant cette inégalité à $x = \theta\phi(W)$ et $y = \theta\phi(W')$, on obtient

$$m'(\theta) \leq \frac{\theta}{4}\mathbb{E}\Big[(e^{\theta\phi(W)} + e^{\theta\phi(W')})\,|\phi(W) - \phi(W')|\,|F(W,W')|\Big].$$

Par échangeabilité, les deux termes sont égaux ; ainsi

$$m'(\theta) \leq \frac{\theta}{2}\mathbb{E}\Big[e^{\theta\phi(W)}\,|\phi(W) - \phi(W')|\,|F(W,W')|\Big] = \theta\mathbb{E}\big[e^{\theta\phi(W)}\Delta(W)\big].$$

En utilisant l'hypothèse sur Δ,

$$m'(\theta) \leq B\theta\mathbb{E}\big[\phi(W)e^{\theta\phi(W)}\big] + C\theta\mathbb{E}\big[e^{\theta\phi(W)}\big] = B\theta m'(\theta) + C\theta m(\theta).$$

On a donc

$$\boxed{m'(\theta) \leq B\theta m'(\theta) + C\theta m(\theta) \qquad (\theta \geq 0).}$$

Si $\theta \in [0, 1/B[$ (avec la convention $1/0 = +\infty$ si $B = 0$), alors

$$(1 - B\theta)\frac{m'(\theta)}{m(\theta)} \leq C\theta.$$

D'où

$$(\ln m)'(\theta) \leq \frac{C\theta}{1 - B\theta}.$$

En intégrant de 0 à θ et en utilisant $m(0) = 1$,

$$\ln m(\theta) \leq \int_0^\theta \frac{Cu}{1 - Bu}\, du \leq \frac{C}{1 - B\theta}\int_0^\theta u\, du = \frac{C\theta^2}{2(1 - B\theta)}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall \theta \in [0, 1/B[, \qquad \ln m(\theta) \leq \frac{C\theta^2}{2(1 - B\theta)}.}$$

Question 17. Soit $t \geq 0$ et $\theta \in [0, 1/B[$. Par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(\phi(W) \geq t) \leq e^{-\theta t}m(\theta) \leq \exp\left(-\theta t + \frac{C\theta^2}{2(1 - B\theta)}\right).$$

On choisit

$$\theta = \frac{t}{C + Bt}.$$

Alors $\theta \in [0, 1/B[$ et

$$1 - B\theta = \frac{C}{C + Bt}.$$

Donc

$$-\theta t + \frac{C\theta^2}{2(1 - B\theta)} = -\frac{t^2}{C + Bt} + \frac{t^2}{2(C + Bt)} = -\frac{t^2}{2C + 2Bt}.$$

On obtient la borne supérieure

$$\boxed{\mathbb{P}(\phi(W) \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2C+2Bt}\right).}$$

En remplaçant F par $-F$, on remplace ϕ par $-\phi$ sans changer Δ ; on a donc aussi

$$\mathbb{P}(-\phi(W) \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2C+2Bt}\right).$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}(|\phi(W)| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2C+2Bt}\right).}$$

2.3. Applications aux sommes de variables aléatoires indépendantes

Question 18. On considère des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_N$, des copies indépendantes $X'_1, \dots, X'_N$, et une variable I uniforme sur $\{1, \dots, N\}$, indépendante de tout le reste. On pose

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i, \qquad S'_N = S_N - X_I + X'_I.$$

(18a) Pour tout i, la variable X'_i a même loi que X_i et elle est indépendante des autres coordonnées. Ainsi le vecteur obtenu en remplaçant X_i par X'_i a même loi que le vecteur initial. Comme I est uniforme et indépendant,

$$(S_N, S'_N) = (S_N, S_N - X_I + X'_I)$$

a même loi que (S'_N, S_N). Le couple (S_N, S'_N) est donc échangeable.

(18b) Conditionnellement à $(X_1, \dots, X_N)$, la variable I est uniforme, donc

$$\mathbb{E}[X_I \mid X_1, \dots, X_N] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i = \frac{S_N}{N}.$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à S_N, on obtient

$$\boxed{\mathbb{E}[X_I \mid S_N] = \frac{S_N}{N}.}$$

Question 19. On suppose ici que les X_i sont bornées, à valeurs dans un ensemble dénombrable, avec

$$\mu_i = \mathbb{E}[X_i], \qquad \sigma_i^2 = \mathrm{Var}(X_i),$$

et qu'il existe des constantes $c_i \geq 0$ telles que $|X_i - \mu_i| \leq c_i$ presque sûrement. On veut montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{\sum_{i=1}^{N}(c_i^2 + \sigma_i^2)}\right).$$

On applique le cadre abstrait à

$$W = S_N, \qquad W' = S'_N, \qquad F(x, y) = N(x - y).$$

La fonction F est bien antisymétrique et bornée. Par la question 18(b),

$$\begin{aligned}\phi(W) &= \mathbb{E}[F(W,W') \mid S_N] = N\mathbb{E}[S_N - S'_N \mid S_N] \\ &= N\mathbb{E}[X_I - X'_I \mid S_N] = N\left(\frac{S_N}{N} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_i\right) = S_N - \mathbb{E}[S_N].\end{aligned}$$

Donc

$$\phi(W) = S_N - \mathbb{E}[S_N].$$

Ensuite,

$$W - W' = X_I - X'_I,$$

donc

$$\begin{aligned}\Delta(W) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(|(\phi(W) - \phi(W'))F(W,W')| \mid S_N) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(N\,|W - W'|^2 \mid S_N) = \frac{N}{2}\mathbb{E}((X_I - X'_I)^2 \mid S_N).\end{aligned}$$

Conditionnellement à S_N, et en utilisant l'uniformité de I,

$$\Delta(W) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}((X_i - X'_i)^2 \mid S_N).$$

Or X'_i est indépendante de S_N et de X_i, de moyenne μ_i et de variance σ_i^2, donc

$$\mathbb{E}((X_i - X'_i)^2 \mid S_N) = \mathbb{E}((X_i - \mu_i)^2 \mid S_N) + \sigma_i^2.$$

Comme $|X_i - \mu_i| \le c_i$ presque sûrement,

$$\mathbb{E}((X_i - \mu_i)^2 \mid S_N) \le c_i^2.$$

Par conséquent,

$$\Delta(W) \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(c_i^2 + \sigma_i^2) =: C.$$

Ici on peut prendre $B = 0$. La question 17 donne alors

$$\mathbb{P}(|\phi(W)| \ge t) \le 2\exp\left(-\frac{t^2}{2C}\right) = 2\exp\left(-\frac{t^2}{\sum_{i=1}^{N}(c_i^2 + \sigma_i^2)}\right).$$

Comme $\phi(W) = S_N - \mathbb{E}[S_N]$, on conclut :

$$\boxed{\mathbb{P}(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \ge t) \le 2\exp\left(-\frac{t^2}{\sum_{i=1}^{N}(c_i^2 + \sigma_i^2)}\right).}$$

Question 20. On suppose ici $0 \le X_i \le 1$ presque sûrement. On garde les mêmes notations que dans la question 19. On a toujours

$$\phi(W) = S_N - \mathbb{E}[S_N].$$

De plus,

$$\Delta(W) = \frac{N}{2}\mathbb{E}((X_I - X'_I)^2 \mid S_N).$$

Comme $0 \le X_I, X'_I \le 1$, on a

$$(X_I - X'_I)^2 \le X_I + X'_I.$$

Donc
$$\Delta(W) \le \frac{N}{2}\mathbb{E}[X_I + X_I' \mid S_N] = \frac{1}{2}S_N + \frac{1}{2}\mathbb{E}[S_N].$$
Or
$$\frac{1}{2}S_N + \frac{1}{2}\mathbb{E}[S_N] = \frac{1}{2}(S_N - \mathbb{E}[S_N]) + \mathbb{E}[S_N] = \frac{1}{2}\phi(W) + \mathbb{E}[S_N].$$
On peut donc prendre
$$B = \frac{1}{2}, \qquad C = \mathbb{E}[S_N].$$
La question 17 donne alors, pour tout $t \ge 0$,
$$\boxed{\mathbb{P}(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \ge t) \le 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\mathbb{E}[S_N] + t}\right).}$$

2.4. Une inégalité de concentration pour une somme de variables aléatoires faiblement dépendantes

Question 21. Soit π_N uniforme sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_N$. On choisit I, J indépendantes et uniformes sur $\{1, \ldots, N\}$, indépendantes de π_N, et l'on pose
$$\pi_N' = \pi_N \circ (I\ J),$$
où $(I\ J)$ désigne la transposition échangeant I et J (et égale à l'identité si $I = J$).

Pour montrer l'échangeabilité, il suffit de voir que la loi du couple
$$(\pi_N, \pi_N \circ (I\ J))$$
est la même que celle de
$$(\pi_N \circ (I\ J), \pi_N).$$
Or la transposition $(I\ J)$ est son propre inverse. De plus, si τ est une transposition fixe, la permutation $\pi_N \circ \tau$ est encore uniforme sur $\mathfrak{S}_N$. Par symétrie,
$$(\pi_N, \pi_N \circ (I\ J)) \overset{\mathcal{L}}{=} (\pi_N \circ (I\ J), \pi_N).$$
Le couple (π_N, π_N') est donc échangeable.

Question 22. On considère désormais des réels $(a_{i,j})_{1 \le i,j \le N}$ vérifiant $0 \le a_{i,j} \le 1$ et
$$S_N = \sum_{i=1}^{N} a_{i,\pi_N(i)}, \qquad S_N' = \sum_{i=1}^{N} a_{i,\pi_N'(i)}.$$

(22a) Posons
$$x = a_{i,\pi_N(i)}, \quad y = a_{j,\pi_N(j)}, \quad z = a_{i,\pi_N(j)}, \quad w = a_{j,\pi_N(i)}.$$
Alors $x, y, z, w \in [0, 1]$ et
$$x + y - z - w = (x - z) + (y - w).$$
Donc
$$(x + y - z - w)^2 \le 2(x - z)^2 + 2(y - w)^2.$$
Or, pour $u, v \in [0, 1]$, on a $(u - v)^2 \le u + v$. Ainsi
$$(x - z)^2 \le x + z, \qquad (y - w)^2 \le y + w.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\big(a_{i,\pi_N(i)} + a_{j,\pi_N(j)} - a_{i,\pi_N(j)} - a_{j,\pi_N(i)}\big)^2 \leq 2\big(a_{i,\pi_N(i)} + a_{j,\pi_N(j)} + a_{i,\pi_N(j)} + a_{j,\pi_N(i)}\big).}$$

(22b) On applique le cadre abstrait à

$$W = S_N, \qquad W' = S'_N, \qquad F(x,y) = \frac{N}{2}(x-y).$$

La fonction F est antisymétrique et bornée.

Conditionnellement à π_N, donc à S_N, on a

$$S_N - S'_N = a_{I,\pi_N(I)} + a_{J,\pi_N(J)} - a_{I,\pi_N(J)} - a_{J,\pi_N(I)}.$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à (I,J),

$$\begin{aligned}\phi(W) &= \mathbb{E}\left[\frac{N}{2}(S_N - S'_N) \mid \pi_N\right] \\ &= \frac{N}{2}\cdot\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\big(a_{i,\pi_N(i)} + a_{j,\pi_N(j)} - a_{i,\pi_N(j)} - a_{j,\pi_N(i)}\big).\end{aligned}$$

La somme des deux premiers termes vaut $2NS_N$, donc leur contribution est S_N. Pour les deux autres,

$$\frac{N}{2}\cdot\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,\pi_N(j)} = \frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} = \frac{1}{2}\mathbb{E}[S_N],$$

car π_N est uniforme et

$$\mathbb{E}[S_N] = \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}.$$

On obtient donc

$$\phi(W) = S_N - \mathbb{E}[S_N].$$

Calculons maintenant $\Delta(W)$:

$$\Delta(W) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(|(\phi(W)-\phi(W'))F(W,W')| \mid \pi_N) = \frac{N}{4}\mathbb{E}((S_N - S'_N)^2 \mid \pi_N).$$

Conditionnellement à π_N, (I,J) est uniforme, donc

$$\Delta(W) = \frac{N}{4}\cdot\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\big(a_{i,\pi_N(i)} + a_{j,\pi_N(j)} - a_{i,\pi_N(j)} - a_{j,\pi_N(i)}\big)^2.$$

En utilisant (22a),

$$\Delta(W) \leq \frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^{N}\big(a_{i,\pi_N(i)} + a_{j,\pi_N(j)} + a_{i,\pi_N(j)} + a_{j,\pi_N(i)}\big).$$

La contribution des deux premiers termes vaut S_N, et celle des deux derniers vaut $\mathbb{E}[S_N]$. Donc

$$\Delta(W) \leq S_N + \mathbb{E}[S_N] = \phi(W) + 2\mathbb{E}[S_N].$$

On peut prendre

$$B = 1, \qquad C = 2\mathbb{E}[S_N].$$

La question 17 donne alors

$$\boxed{\mathbb{P}\big(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \geq t\big) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{4\mathbb{E}[S_N]+2t}\right).}$$

Question 23. On choisit
$$a_{i,j} = \mathbf{1}_{\{i=j\}}.$$
Alors
$$S_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{\{\pi_N(i)=i\}} = F_N,$$
où F_N désigne le nombre de points fixes de la permutation π_N. De plus,
$$\mathbb{E}[F_N] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(\pi_N(i) = i) = N \cdot \frac{1}{N} = 1.$$
La question 22(b) donne donc, pour tout $u \geq 0$,
$$\mathbb{P}(|F_N - 1| \geq u) \leq 2\exp\left(-\frac{u^2}{4+2u}\right).$$
Si $k \geq 2$, l'événement $\{F_N \geq k\}$ implique $\{|F_N - 1| \geq k-1\}$, donc
$$\mathbb{P}(F_N \geq k) \leq 2\exp\left(-\frac{(k-1)^2}{4+2(k-1)}\right) = 2\exp\left(-\frac{(k-1)^2}{2(k+1)}\right).$$
Il reste à comparer l'exposant à $k/12$: pour $k \geq 2$,
$$\frac{(k-1)^2}{2(k+1)} \geq \frac{k}{12} \iff 6(k-1)^2 \geq k(k+1) \iff 5k^2 - 13k + 6 \geq 0.$$
Or
$$5k^2 - 13k + 6 = (5k-3)(k-2) \geq 0 \qquad (k \geq 2).$$
Ainsi,
$$\boxed{\forall k \geq 2, \qquad \mathbb{P}(F_N \geq k) \leq 2e^{-k/12}.}$$

3. Concentration pour le modèle de Curie-Weiss

Dans cette partie, $\beta > 0$, $h \in \mathbb{R}$, et $X = (X_1, \ldots, X_N)$ suit le modèle de Curie-Weiss de loi
$$\mathbb{P}(X = \sigma) = \frac{1}{Z_{N,\beta,h}} \exp\left(\frac{\beta}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sigma_i\sigma_j + \beta h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i\right), \qquad \sigma \in \{-1,1\}^N.$$
On note
$$m(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i, \qquad m_i(X) = \frac{1}{N}\sum_{j \neq i} X_j = m(X) - \frac{X_i}{N}.$$

Question 24. Fixons $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ et conditionnons par les valeurs des autres coordonnées. Pour $x \in \{-1,1\}$,
$$\mathbb{P}(X_{i_0} = x \mid (X_j)_{j \neq i_0}) \propto \exp\left(x\left(\beta h + \frac{\beta}{N}\sum_{j \neq i_0} X_j\right)\right) = \exp(x(\beta h + \beta m_{i_0}(X))).$$
Posons
$$u = \beta h + \beta m_{i_0}(X).$$

Alors
$$\mathbb{P}(X_{i_0} = 1 \mid (X_j)_{j\neq i_0}) = \frac{e^{\nu}}{e^{\nu}+e^{-\nu}}, \qquad \mathbb{P}(X_{i_0} = -1 \mid (X_j)_{j\neq i_0}) = \frac{e^{-\nu}}{e^{\nu}+e^{-\nu}}.$$
Donc
$$\mathbb{E}[X_{i_0} \mid (X_j)_{j\neq i_0}] = \frac{e^{\nu}-e^{-\nu}}{e^{\nu}+e^{-\nu}} = \tanh(\nu).$$
Ainsi,
$$\boxed{\mathbb{E}[X_{i_0} \mid (X_j)_{j\neq i_0}] = \tanh\big(\beta m_{i_0}(X) + \beta h\big).}$$

Question 25. Pour tout i_0 et toute configuration $\sigma \in \{-1,1\}^N$, on note X'_{i_0} une variable à valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que
$$\mathbb{P}(X'_{i_0} = x \mid (X_j)_{j\neq i_0} = \sigma_j,\ 1\le j\le N) = \frac{1}{C}\exp\big(x(\beta m_{i_0}(\sigma)+\beta h)\big), \qquad x\in\{-1,1\}.$$

(25a) La constante de normalisation vaut
$$C = e^{\beta m_{i_0}(\sigma)+\beta h} + e^{-\beta m_{i_0}(\sigma)-\beta h} = 2\cosh\big(\beta m_{i_0}(\sigma)+\beta h\big).$$
Donc
$$\boxed{C = 2\cosh\big(\beta m_{i_0}(\sigma)+\beta h\big).}$$

(25b) On choisit I uniforme sur $\{1,\dots,N\}$, indépendant de tout le reste, puis on pose
$$X' = (X_1,\dots,X_{I-1},X'_I,X_{I+1},\dots,X_N).$$
Il faut montrer que (X,X') est échangeable.

Si deux configurations $\sigma,\tau\in\{-1,1\}^N$ diffèrent en plus d'une coordonnée, alors
$$\mathbb{P}(X=\sigma, X'=\tau) = \mathbb{P}(X=\tau, X'=\sigma) = 0.$$
Supposons donc qu'elles diffèrent exactement en une coordonnée i. Conditionnellement à $I=i$ et aux autres spins, la loi de la paire (X_i, X'_i) est symétrique : c'est le produit
$$\mathbb{P}(X_i=\sigma_i \mid X_{-i})\,\mathbb{P}(X'_i = au_i \mid X_{-i}),$$
et la même expression apparaît quand on échange σ_i et τ_i. En multipliant par $\mathbb{P}(I=i)=1/N$ et par la loi commune des autres spins, on obtient
$$\mathbb{P}(X=\sigma, X'=\tau) = \mathbb{P}(X=\tau, X'=\sigma).$$
Le couple (X,X') est donc échangeable.

Question 26. On pose maintenant
$$F(X,X') = X_I - X'_I.$$
Comme $F(X',X) = X'_I - X_I = -F(X,X')$, la fonction F est antisymétrique. De plus,
$$\begin{aligned}\phi(X) &= \mathbb{E}[F(X,X') \mid X]\\ &= \mathbb{E}[X_I - X'_I \mid X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}[X'_i \mid X, I=i].\end{aligned}$$
D'après la question 24, conditionnellement à X et à $I=i$,
$$\mathbb{E}[X'_i \mid X, I=i] = \tanh\big(\beta m_i(X)+\beta h\big).$$
Par conséquent,
$$\boxed{\phi(X) = m(X) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \tanh\big(\beta m_i(X)+\beta h\big).}$$

Question 27. On pose
$$u(X) = m(X) - \tanh(\beta m(X) + \beta h).$$
Il s'agit d'obtenir une borne de concentration pour $\nu(X)$.

Comme $\tanh'$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$, la fonction tanh est 1-lipschitzienne. Or
$$m_i(X) = m(X) - \frac{X_i}{N},$$
donc
$$|m_i(X) - m(X)| = \frac{1}{N}.$$
Ainsi,
$$\left|\tanh(\beta m_i(X) + \beta h) - \tanh(\beta m(X) + \beta h)\right| \leq \frac{\beta}{N}.$$
En moyennant sur i,
$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \tanh(\beta m_i(X) + \beta h) - \tanh(\beta m(X) + \beta h)\right| \leq \frac{\beta}{N}.$$
Comme, d'après la question 26,
$$\phi(X) = m(X) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \tanh(\beta m_i(X) + \beta h),$$
on en déduit
$$\boxed{|\phi(X) - \nu(X)| \leq \frac{\beta}{N}.}$$
Il reste à majorer $\Delta(X)$. Si X' diffère de X seulement en la coordonnée I, alors
$$\left|m(X) - m(X')\right| \leq \frac{2}{N}.$$
Pour $j \neq I$, on a aussi
$$\left|m_j(X) - m_j(X')\right| \leq \frac{2}{N},$$
et pour $j = I$, on a même $m_I(X) = m_I(X')$. Donc, par 1-lipschitzianité de tanh,
$$\begin{aligned}\left|\phi(X) - \phi(X')\right| &\leq \left|m(X) - m(X')\right| \\ &\quad + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \left|\tanh(\beta m_j(X) + \beta h) - \tanh(\beta m_j(X') + \beta h)\right| \\ &\leq \frac{2}{N} + \frac{N-1}{N}\cdot\frac{2\beta}{N} \leq \frac{2(1+\beta)}{N}.\end{aligned}$$
Par ailleurs,
$$\left|F(X, X')\right| = \left|X_I - X_I'\right| \leq 2.$$
Par conséquent,
$$\Delta(X) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(\left|(\phi(X) - \phi(X'))F(X, X')\right| \mid X) \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{2(1+\beta)}{N}\cdot 2 = \frac{2(1+\beta)}{N}.$$
On peut donc prendre
$$B = 0, \qquad C = \frac{2(1+\beta)}{N}.$$

La question 17 donne alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(|\phi(X)| \geq \frac{t}{\sqrt{N}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2/N}{4(1+\beta)/N}\right) = 2\exp\left(-\frac{t^2}{4(1+\beta)}\right).$$

Enfin, si

$$|\nu(X)| \geq \frac{\beta}{N} + \frac{t}{\sqrt{N}},$$

alors, grâce à $|\phi(X) - \nu(X)| \leq \beta/N$, on a nécessairement

$$|\phi(X)| \geq \frac{t}{\sqrt{N}}.$$

D'où

$$\boxed{\forall t \geq 0, \qquad \mathbb{P}\left(|m(X) - \tanh(\beta m(X) + \beta h)| \geq \frac{\beta}{N} + \frac{t}{\sqrt{N}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{4(1+\beta)}\right).}$$

Fin de la correction