

Correction détaillée

Concours X/ENS 2026 – Filière PC

Mathématiques

Sujet sur les modèles de matériaux ferromagnétiques

Cette correction est rédigée dans l'esprit d'une copie de concours : justification des étapes clés, calculs détaillés lorsqu'ils apportent une vraie information, et mise en évidence des idées directrices.

Excellence Maths

www.excellence-maths.fr

Première partie – Convexité et fonction log-Laplace

1. Soient $y < x < z$. En écrivant x comme combinaison convexe de y et z ,

$$x = \frac{z-x}{z-y}y + \frac{x-y}{z-y}z,$$

on obtient, par convexité de g ,

$$g(x) \leq \frac{z-x}{z-y}g(y) + \frac{x-y}{z-y}g(z).$$

Après réarrangement,

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} \leq \frac{g(z) - g(x)}{z - x}.$$

C'est la monotonie classique des pentes des cordes pour une fonction convexe.

On applique cela avec $(y, z) = (x - h, x + u)$, où $u > 0$:

$$\frac{g(x) - g(x - h)}{h} \leq \frac{g(x + u) - g(x)}{u}.$$

En faisant tendre $u \rightarrow 0^+$ et en utilisant l'existence de $g'(x)$, on obtient

$$\frac{g(x) - g(x - h)}{h} \leq g'(x).$$

De même, en prenant $(y, z) = (x - u, x + h)$ avec $u > 0$,

$$\frac{g(x) - g(x - u)}{u} \leq \frac{g(x + h) - g(x)}{h}.$$

En faisant tendre $u \rightarrow 0^+$, on obtient

$$g'(x) \leq \frac{g(x + h) - g(x)}{h}.$$

Ainsi, pour tout $h > 0$,

$$\frac{g(x) - g(x - h)}{h} \leq g'(x) \leq \frac{g(x + h) - g(x)}{h}.$$

2. Soient $\alpha \in [0, 1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Pour tout n ,

$$f_n(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f_n(x) + (1 - \alpha)f_n(y)$$

car f_n est convexe. En faisant tendre $n \rightarrow \infty$ et en utilisant la convergence simple, on obtient

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Donc f est convexe.

3. Un contre-exemple classique est

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Chaque f_n est de classe \mathcal{C}^1 et convexe sur \mathbb{R} , et

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |x|$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

4. Fixons $x \in \mathbb{R}$ en lequel f est dérivable. D'après la question 1, pour tout $h > 0$ et tout n ,

$$\frac{f_n(x) - f_n(x-h)}{h} \leq f'_n(x) \leq \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}.$$

En passant à la limite sur n , on obtient

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Comme f est dérivable en x , les deux encadrements extrêmes tendent vers $f'(x)$ quand $h \rightarrow 0^+$.
Donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x).$$

Par conséquent,

$$f'_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f'(x).$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $u \in \mathbb{R}^d$. Considérons la fonction d'une variable réelle

$$\varphi_u(t) = g(x + tu).$$

Comme g est convexe, φ_u est convexe sur \mathbb{R} . Comme g est de classe \mathcal{C}^2 , φ_u est de classe \mathcal{C}^2 et, pour tout t ,

$$\varphi''_u(t) = u^\top \text{Hess } g(x + tu) u.$$

Or une fonction convexe de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} a une dérivée seconde positive. Donc, pour $t = 0$,

$$u^\top \text{Hess } g(x) u \geq 0.$$

Ainsi la matrice hessienne est positive au sens quadratique. Elle est en outre symétrique par le théorème de Schwarz (égalité des dérivées croisées d'une fonction de classe \mathcal{C}^2). Donc $\text{Hess } g(x)$ est symétrique positive.

6. Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ et définissons, pour $t \in [0, 1]$,

$$\psi(t) = g((1-t)x + ty).$$

La fonction ψ est de classe \mathcal{C}^2 et

$$\psi''(t) = (y-x)^\top \text{Hess } g((1-t)x + ty)(y-x) \geq 0$$

pour tout $t \in [0, 1]$, puisque la hessienne est positive. Donc ψ est convexe sur $[0, 1]$. Pour $\alpha \in [0, 1]$,

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) = \psi(1-\alpha) \leq (1-\alpha)\psi(0) + \alpha\psi(1) = (1-\alpha)g(x) + \alpha g(y).$$

En renommant éventuellement les coefficients, on obtient bien que g est convexe sur \mathbb{R}^d .

7. Posons

$$M(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}].$$

Comme X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, M est une somme finie d'exponentielles : M est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^d , et strictement positive. Par conséquent

$$\phi(\lambda) = \ln M(\lambda)$$

est de classe \mathcal{C}^2 .

De plus,

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \mathbb{E}[X_i e^{\lambda \cdot X}], \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}(\lambda) = \mathbb{E}[X_i X_j e^{\lambda \cdot X}].$$

Par dérivation du logarithme,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \frac{1}{M(\lambda)} \frac{\partial M}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \frac{\mathbb{E}[X_i e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]},$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}(\lambda) &= \frac{1}{M(\lambda)} \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}(\lambda) - \frac{1}{M(\lambda)^2} \frac{\partial M}{\partial \lambda_i}(\lambda) \frac{\partial M}{\partial \lambda_j}(\lambda) \\ &= \frac{\mathbb{E}[X_i X_j e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} - \frac{\mathbb{E}[X_i e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} \frac{\mathbb{E}[X_j e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} \end{aligned}$$

8. D'après la question 7, pour tout $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$u^\top \text{Hess } \phi(\lambda) u = \frac{\mathbb{E}[(u \cdot X)^2 e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} - \left(\frac{\mathbb{E}[(u \cdot X) e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} \right)^2.$$

Le membre de droite est la variance de $u \cdot X$ sous la probabilité tordue

$$d\mathbb{P}_\lambda = \frac{e^{\lambda \cdot X}}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} d\mathbb{P},$$

donc il est positif. La hessienne de ϕ est donc partout symétrique positive. Par la question 6, ϕ est convexe.

Deuxième partie – Modèle d'Ising unidimensionnel

Pour simplifier les écritures, on note

$$T_N = \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_N \sigma_1, \quad M_N = \sum_{i=1}^N \sigma_i.$$

Alors

$$H_N(\beta, h, X^{(N)}) = \beta T_N + h M_N.$$

9. Si $\beta = 0$, alors

$$H_N(0, h, X^{(N)}) = h \sum_{i=1}^N \sigma_i.$$

Par indépendance des σ_i ,

$$Z_N(0, h) = \prod_{i=1}^N \mathbb{E}[e^{h\sigma_i}] = (\mathbb{E}[e^{h\sigma_1}])^N.$$

Or

$$\mathbb{E}[e^{h\sigma_1}] = \frac{e^h + e^{-h}}{2} = \text{ch}(h).$$

Donc

$$Z_{N+1}(0, h) = \text{ch}(h) Z_N(0, h) \quad \text{et même} \quad Z_N(0, h) = \text{ch}(h)^N.$$

Par suite,

$$F_N(0, h) = \frac{1}{N} \ln Z_N(0, h) = \ln(\text{ch}(h)).$$

10. Posons

$$Y_N = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_N \sigma_1, \sum_{i=1}^N \sigma_i \right).$$

La variable aléatoire Y_N prend un nombre fini de valeurs dans \mathbb{R}^2 , et

$$Z_N(\beta, h) = \mathbb{E}[e^{(\beta, h) \cdot Y_N}].$$

Ainsi,

$$F_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \ln \mathbb{E}[e^{(\beta, h) \cdot Y_N}].$$

D'après la question 8, la fonction $(\beta, h) \mapsto \ln \mathbb{E}[e^{(\beta, h) \cdot Y_N}]$ est convexe sur \mathbb{R}^2 . Sa multiplication par $1/N > 0$ conserve la convexité. Donc F_N est convexe.

11. On a

$$A = \begin{pmatrix} e^{\beta-h} & e^{-\beta+h} \\ e^{-\beta-h} & e^{\beta+h} \end{pmatrix}.$$

Sa trace et son déterminant valent

$$\text{tr}(A) = e^{\beta-h} + e^{\beta+h} = 2e^\beta \text{ch}(h),$$

$$\det(A) = e^{2\beta} - e^{-2\beta} = 2 \text{sh}(2\beta).$$

Le polynôme caractéristique est donc

$$X^2 - 2e^\beta \text{ch}(h)X + 2 \text{sh}(2\beta).$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = 4(e^{2\beta} \text{ch}^2(h) - 2 \text{sh}(2\beta)).$$

Or

$$e^{2\beta} \text{ch}^2(h) - 2 \text{sh}(2\beta) = e^{2\beta} (1 + \text{sh}^2(h)) - (e^{2\beta} - e^{-2\beta}) = e^{2\beta} \text{sh}^2(h) + e^{-2\beta} > 0.$$

Les deux valeurs propres sont donc réelles et distinctes, et la plus grande vaut

$$\lambda(\beta, h) = e^\beta \text{ch}(h) + \sqrt{e^{2\beta} \text{ch}^2(h) - 2 \text{sh}(2\beta)}.$$

12. Par définition,

$$B_{s,t} = \exp(\beta st + hs).$$

Ainsi, pour $a = (a_1, \dots, a_N)$,

$$B_{a_i, a_{i+1}} = \exp(\beta a_i a_{i+1} + h a_i).$$

En multipliant pour $i = 1, \dots, N-1$, puis en ajoutant le facteur B_{a_N, a_1} , on obtient

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^{N-1} B_{a_i, a_{i+1}} \right) B_{a_N, a_1} &= \exp \left(\sum_{i=1}^{N-1} (\beta a_i a_{i+1} + h a_i) + \beta a_N a_1 + h a_N \right) \\ &= \exp(H_N(\beta, h, a)). \end{aligned}$$

13. Comme $X^{(N)}$ est uniforme sur $\{-1, 1\}^N$,

$$Z_N(\beta, h) = 2^{-N} \sum_{a \in \{-1, 1\}^N} e^{H_N(\beta, h, a)}.$$

D'après la question 12,

$$Z_N(\beta, h) = 2^{-N} \sum_{a_1, \dots, a_N \in \{-1, 1\}} B_{a_1, a_2} \cdots B_{a_{N-1}, a_N} B_{a_N, a_1}.$$

Si l'on note $C = (B_{s,t})_{s,t \in \{-1,1\}}$ (dans l'ordre $-1, 1$), alors la formule de la trace donne

$$\operatorname{tr}(C^N) = \sum_{a_1, \dots, a_N \in \{-1,1\}} C_{a_1, a_2} \cdots C_{a_N, a_1}.$$

Donc

$$Z_N(\beta, h) = 2^{-N} \operatorname{tr}(C^N).$$

Or $A = C^\top$, donc $\operatorname{tr}(C^N) = \operatorname{tr}((C^\top)^N) = \operatorname{tr}(A^N)$. Finalement,

$$Z_N(\beta, h) = 2^{-N} \operatorname{tr}(A^N).$$

14. Soient $\lambda_1 > \lambda_2$ les deux valeurs propres réelles de A . Comme $\operatorname{tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$, elles sont en fait positives. D'après la question 11, $\lambda_1 = \lambda(\beta, h)$. Alors

$$\operatorname{tr}(A^N) = \lambda_1^N + \lambda_2^N = \lambda_1^N \left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \right).$$

Comme $0 < \lambda_2/\lambda_1 < 1$,

$$\frac{1}{N} \ln \operatorname{tr}(A^N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \ln \lambda(\beta, h).$$

En utilisant la question 13,

$$F_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \ln Z_N(\beta, h) = -\ln 2 + \frac{1}{N} \ln \operatorname{tr}(A^N),$$

d'où

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(\beta, h) = \ln(\lambda(\beta, h)) - \ln 2.$$

15. On réécrit la formule de la question 11 sous la forme

$$\lambda(\beta, h) = e^\beta \operatorname{ch}(h) + \sqrt{e^{-2\beta} + e^{2\beta} \operatorname{sh}^2(h)}.$$

La fonction

$$(\beta, h) \mapsto e^{-2\beta} + e^{2\beta} \operatorname{sh}^2(h)$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 et strictement positive. La fonction racine carrée est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$; par composition, $(\beta, h) \mapsto \sqrt{e^{-2\beta} + e^{2\beta} \operatorname{sh}^2(h)}$ est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 . Il en est alors de même de λ , a fortiori sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

16. Fixons $\beta \geq 0$ et considérons, pour $h \in \mathbb{R}$,

$$f_N(h) = F_N(\beta, h).$$

La question 10 montre que f_N est convexe; c'est de plus une fonction de classe \mathcal{C}^1 puisque Z_N est une somme finie d'exponentielles. En dérivant,

$$\begin{aligned} f'_N(h) &= \frac{1}{N} \frac{\partial_h Z_N(\beta, h)}{Z_N(\beta, h)} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right) e^{H_N(\beta, h, X^{(N)})} \right]}{Z_N(\beta, h)} \\ &= m_N(\beta, h). \end{aligned}$$

D'après les questions 14 et 15, f_N converge simplement vers

$$f(h) = \ln(\lambda(\beta, h)) - \ln 2,$$

qui est dérivable sur \mathbb{R} . La question 4 donne alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$m_N(\beta, h) = f'_N(h) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f'(h) = \frac{\partial}{\partial h} \ln(\lambda(\beta, h)).$$

17. On part de la réécriture

$$\lambda(\beta, h) = e^\beta \left(\operatorname{ch}(h) + \sqrt{\operatorname{sh}^2(h) + e^{-4\beta}} \right).$$

Ainsi

$$g_\beta(h) = \ln(\lambda(\beta, h)) - \beta = \ln \left(\operatorname{ch}(h) + \sqrt{\operatorname{sh}^2(h) + e^{-4\beta}} \right).$$

Quand $\beta \rightarrow +\infty$, on a $e^{-4\beta} \rightarrow 0$, donc

$$g_\beta(h) \longrightarrow \ln(\operatorname{ch}(h) + |\operatorname{sh}(h)|).$$

Si $h \geq 0$, alors $|\operatorname{sh}(h)| = \operatorname{sh}(h)$ et $\operatorname{ch}(h) + \operatorname{sh}(h) = e^h$, donc la limite vaut h . Si $h \leq 0$, alors $|\operatorname{sh}(h)| = -\operatorname{sh}(h)$ et $\operatorname{ch}(h) - \operatorname{sh}(h) = e^{-h}$, donc la limite vaut $-h$. Finalement,

$$g_\beta(h) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} |h|.$$

18. À partir de l'expression précédente,

$$g_\beta(h) = \ln \left(\operatorname{ch}(h) + \sqrt{\operatorname{sh}^2(h) + e^{-4\beta}} \right),$$

on calcule

$$\begin{aligned} g'_\beta(h) &= \frac{\operatorname{sh}(h) + \frac{\operatorname{sh}(h) \operatorname{ch}(h)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(h) + e^{-4\beta}}}}{\operatorname{ch}(h) + \sqrt{\operatorname{sh}^2(h) + e^{-4\beta}}} \\ &= \frac{\operatorname{sh}(h)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(h) + e^{-4\beta}}}. \end{aligned}$$

Donc, quand $\beta \rightarrow +\infty$,

$$g'_\beta(h) \longrightarrow \begin{cases} 1, & h > 0, \\ 0, & h = 0, \\ -1, & h < 0. \end{cases}$$

La limite simple de (g'_β) est donc la fonction

$$h \longmapsto \begin{cases} 1, & h > 0, \\ 0, & h = 0, \\ -1, & h < 0. \end{cases}$$

Cette convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R} : en effet, chaque g'_β est continue, tandis que la limite simple ne l'est pas en 0 ; or une limite uniforme de fonctions continues serait continue.

Troisième partie – Modèle de Curie–Weiss

Remarque préalable sur l'énoncé. Le PDF fourni semble omettre une constante $\ln 2$ dans la définition de I .

Pour que les questions 21–22 et la formule variationnelle annoncée soient cohérentes, il faut travailler avec

$$I(x) = \frac{1+x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{2}\right) + \frac{1-x}{2} \ln\left(\frac{1-x}{2}\right) + \ln 2 = \frac{1+x}{2} \ln(1+x) + \frac{1-x}{2} \ln(1-x).$$

Cette correction ne change ni I' ni I'' , donc n'affecte pas les questions 23 à 32.

Dans toute cette partie, on note donc I la fonction corrigée ci-dessus.

19. On utilise le fait classique

$$t \ln t \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

Quand $x \rightarrow 1^-$,

$$\frac{1+x}{2} \rightarrow 1, \quad \frac{1-x}{2} \rightarrow 0^+,$$

et les deux termes

$$\frac{1+x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1-x}{2} \ln\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

tendent vers 0 (le premier parce que $u \ln u \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow 1$, le second parce que $u \ln u \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow 0^+$). En ajoutant $\ln 2$, on obtient $I(x) \rightarrow \ln 2$. De même, quand $x \rightarrow -1^+$, on a encore $I(x) \rightarrow \ln 2$. Ainsi I se prolonge par continuité à $[-1, 1]$, avec

$$I(-1) = I(1) = \ln 2.$$

20. Si $x \notin \mathcal{M}_N$, alors $\mathbb{P}(S_N = x) = 0$.

Supposons $x \in \mathcal{M}_N$. Si k désigne le nombre de spins égaux à 1, alors le nombre de spins égaux à -1 est $N - k$, et

$$S_N = \frac{k - (N - k)}{N} = \frac{2k - N}{N}.$$

Donc l'événement $\{S_N = x\}$ équivaut à

$$k = \frac{N(1+x)}{2}.$$

Comme toutes les configurations sont équiprobables,

$$\mathbb{P}(S_N = x) = 2^{-N} \binom{N}{\frac{N(1+x)}{2}}.$$

Autrement dit,

$$\mathbb{P}(S_N = x) = \begin{cases} 2^{-N} \binom{N}{\frac{N(1+x)}{2}}, & x \in \mathcal{M}_N, \\ 0, & x \notin \mathcal{M}_N. \end{cases}$$

21. Soit $u_N \in \mathcal{M}_N$ tel que $u_N \rightarrow x \in]-1, 1[$, et posons

$$p_N = \frac{1+u_N}{2} \in [0, 1], \quad p = \frac{1+x}{2} \in]0, 1[.$$

Alors $p_N \rightarrow p$ et, avec $k_N = Np_N \in \{0, \dots, N\}$,

$$\mathbb{P}(S_N = u_N) = 2^{-N} \binom{N}{k_N}.$$

La formule de Stirling donne

$$\ln(n!) = n \ln n - n + o(n).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \ln \binom{N}{k_N} &= \ln(N!) - \ln(k_N!) - \ln((N - k_N)!) \\ &= N \ln N - k_N \ln k_N - (N - k_N) \ln(N - k_N) + o(N). \end{aligned}$$

En divisant par N ,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N} \ln \mathbb{P}(S_N = u_N) &= \ln 2 - \frac{1}{N} \ln \binom{N}{k_N} \\ &= \ln 2 + p_N \ln p_N + (1 - p_N) \ln(1 - p_N) + o(1). \end{aligned}$$

En faisant tendre $N \rightarrow \infty$,

$$-\frac{1}{N} \ln \mathbb{P}(S_N = u_N) \longrightarrow \ln 2 + p \ln p + (1 - p) \ln(1 - p) = I(x).$$

22. On écrit simplement

$$Y_N(\beta, h) = \sum_{y \in \mathcal{M}_N} e^{\beta N y^2 + h N y} \mathbb{P}(S_N = y).$$

Tous les termes étant positifs, pour tout $x \in \mathcal{M}_N$,

$$Y_N(\beta, h) \geq e^{\beta N x^2 + h N x} \mathbb{P}(S_N = x).$$

En prenant le logarithme puis en divisant par N ,

$$G_N(\beta, h) \geq \beta x^2 + h x + \frac{1}{N} \ln \mathbb{P}(S_N = x).$$

23. Pour $x \in]-1, 1[$,

$$I'(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad I''(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Donc

$$\psi''_{\beta, h}(x) = 2\beta - \frac{1}{1-x^2}.$$

Si $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$, alors $2\beta \leq 1$ et, comme $\frac{1}{1-x^2} \geq 1$ sur $] -1, 1[$,

$$\psi''_{\beta, h}(x) \leq 2\beta - 1 \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in] -1, 1[.$$

Si $\beta > \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned} \psi''_{\beta, h}(x) \leq 0 &\iff 2\beta \leq \frac{1}{1-x^2} \\ &\iff 1-x^2 \leq \frac{1}{2\beta} \\ &\iff x^2 \geq 1 - \frac{1}{2\beta}. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\psi''_{\beta,h}(x) \leq 0 \iff |x| \geq \sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}.$$

24. La fonction $\psi_{\beta,h}$ est continue sur $[-1, 1]$, donc elle atteint son maximum.

Supposons $h > 0$. Pour $x > 0$,

$$\psi_{\beta,h}(x) - \psi_{\beta,h}(-x) = 2hx > 0,$$

car I est paire. Aucun maximiseur ne peut donc être négatif ou nul : tout point de maximum est dans $]0, 1[$.

Sur $]0, 1[$,

$$\psi'_{\beta,h}(x) = 2\beta x + h - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right),$$

et

$$\psi'''_{\beta,h}(x) = -\frac{2x}{(1-x^2)^2} < 0.$$

Ainsi $\psi'_{\beta,h}$ est strictement concave sur $]0, 1[$. De plus,

$$\psi'_{\beta,h}(0) = h > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \psi'_{\beta,h}(x) = -\infty.$$

Une fonction concave, positive en 0 et tendant vers $-\infty$ en 1^- , admet un unique zéro dans $]0, 1[$. Notons-le $x_*(\beta, h)$. Alors $\psi_{\beta,h}$ est croissante sur $[0, x_*(\beta, h)]$ puis décroissante sur $[x_*(\beta, h), 1]$: le maximum est donc atteint en l'unique point $x_*(\beta, h) \in]0, 1[$.

Si $h < 0$, on remarque que

$$\psi_{\beta,h}(x) = \psi_{\beta,-h}(-x).$$

Le maximum est donc atteint en un unique point négatif, égal à

$$x_*(\beta, h) = -x_*(\beta, -h) \in]-1, 0[.$$

25. Cas $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$. D'après la question 23, $\psi_{\beta,0}$ est concave sur $[-1, 1]$. Comme elle est paire,

$$\psi_{\beta,0}(x) = \psi_{\beta,0}(-x),$$

et comme

$$\psi'_{\beta,0}(0) = 0,$$

le point 0 est un maximum. De plus, pour $x \neq 0$,

$$\psi''_{\beta,0}(x) = 2\beta - \frac{1}{1-x^2} < 0,$$

donc $\psi_{\beta,0}$ est strictement concave sur tout sous-intervalle ne rencontrant pas 0 ; elle ne peut donc avoir de plateau de maximum. Le maximum en 0 est ainsi unique. On pose donc $x_*(\beta, 0) = 0$.

Cas $\beta > \frac{1}{2}$. On a

$$\psi'_{\beta,0}(0) = 0, \quad \psi''_{\beta,0}(0) = 2\beta - 1 > 0,$$

donc 0 est un minimum local. Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \psi'_{\beta,0}(x) = -\infty.$$

Comme $\psi'_{\beta,0}$ est concave sur $]0, 1[$, elle est d'abord positive puis négative : elle admet un unique zéro $x_*(\beta, 0) \in]0, 1[$. La fonction $\psi_{\beta,0}$ est alors croissante sur $[0, x_*(\beta, 0)]$ puis décroissante sur $[x_*(\beta, 0), 1]$,

donc son maximum sur $[0, 1]$ est atteint en $x_*(\beta, 0)$. Par parité, il est aussi atteint en $-x_*(\beta, 0)$, et en aucun autre point.

26. Posons $x_n = x_*(\beta, v_n)$ et supposons $x_n \rightarrow \ell$. Pour tout $y \in [-1, 1]$, comme x_n maximise ψ_{β, v_n} ,

$$\psi_{\beta, v_n}(x_n) \geq \psi_{\beta, v_n}(y).$$

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$ et en utilisant la continuité de $(h, x) \mapsto \psi_{\beta, h}(x)$, on obtient

$$\psi_{\beta, h}(\ell) \geq \psi_{\beta, h}(y) \quad \text{pour tout } y \in [-1, 1].$$

Donc ℓ est un point de maximum de $\psi_{\beta, h}$. Or, puisque $h > 0$, la question 24 assure l'unicité du maximiseur : on a donc nécessairement

$$\ell = x_*(\beta, h).$$

27. Notons $x_h = x_*(\beta, h)$ et $x_{h'} = x_*(\beta, h')$. Par définition de g ,

$$g(\beta, h') \geq \beta x_h^2 + h' x_h - I(x_h) = g(\beta, h) + (h' - h)x_h.$$

Donc

$$(h' - h)x_h \leq g(\beta, h') - g(\beta, h).$$

De même,

$$g(\beta, h) \geq \beta x_{h'}^2 + h x_{h'} - I(x_{h'}) = g(\beta, h') - (h' - h)x_{h'},$$

d'où

$$g(\beta, h') - g(\beta, h) \leq (h' - h)x_{h'}.$$

Ainsi,

$$(h' - h)x_*(\beta, h) \leq g(\beta, h') - g(\beta, h) \leq (h' - h)x_*(\beta, h').$$

28. Fixons $\beta \geq 0$ et $h > 0$. Si $h' > h$, la question 27 donne

$$x_*(\beta, h) \leq \frac{g(\beta, h') - g(\beta, h)}{h' - h} \leq x_*(\beta, h').$$

En faisant tendre $h' \rightarrow h^+$ et en utilisant la continuité admise de $h \mapsto x_*(\beta, h)$, on obtient la dérivée à droite, égale à $x_*(\beta, h)$.

Si $0 \leq h' < h$, alors en divisant l'inégalité de la question 27 par le nombre négatif $h' - h$, on obtient

$$x_*(\beta, h') \leq \frac{g(\beta, h') - g(\beta, h)}{h' - h} \leq x_*(\beta, h).$$

En faisant tendre $h' \rightarrow h^-$, on obtient la même limite. Donc $h' \mapsto g(\beta, h')$ est dérivable en h , avec

$$\frac{\partial g}{\partial h}(\beta, h) = x_*(\beta, h).$$

29. Pour $h > 0$, la question 28 donne la dérivabilité de $h \mapsto g(\beta, h)$. Pour $h < 0$, on remarque que

$$g(\beta, -h) = g(\beta, h)$$

(car le supremum de $x \mapsto \beta x^2 + hx - I(x)$ est inchangé par le changement de variable $x \mapsto -x$). La fonction est donc également dérivable sur $] -\infty, 0[$.

Il reste à examiner $h = 0$.

- Si $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$, la question 25 donne $x_*(\beta, 0) = 0$; par continuité admise, $x_*(\beta, h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0^+$. La question 28 montre alors que la dérivée à droite en 0 vaut 0. Comme g est paire, la dérivée à gauche vaut aussi 0. Donc $g(\beta, \cdot)$ est dérivable en 0.
- Si $\beta > \frac{1}{2}$, la question 25 donne $x_*(\beta, 0) > 0$. La dérivée à droite en 0 vaut alors $x_*(\beta, 0) > 0$, tandis que la parité de g impose une dérivée à gauche égale à $-x_*(\beta, 0) < 0$. La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

En conclusion,

$$h \mapsto g(\beta, h) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \iff 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}.$$

30. On observe d'abord que

$$\frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j = \frac{\beta}{N} \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right)^2 = \beta N S_N^2.$$

L'expression étudiée est donc simplement

$$\frac{1}{Y_N(\beta, h)} \mathbb{E}[S_N e^{\beta N S_N^2 + h N S_N}].$$

Posons, pour $h' \in \mathbb{R}$,

$$u_N(h') = G_N(\beta, h') = \frac{1}{N} \ln Y_N(\beta, h').$$

Comme $Y_N(\beta, h')$ est une somme finie de termes de la forme $c_x e^{N h' x}$ avec $c_x \geq 0$, la fonction u_N est convexe et de classe \mathcal{C}^1 . De plus,

$$\begin{aligned} u'_N(h) &= \frac{1}{N} \frac{\partial_h Y_N(\beta, h)}{Y_N(\beta, h)} \\ &= \frac{1}{Y_N(\beta, h)} \mathbb{E}[S_N e^{\beta N S_N^2 + h N S_N}]. \end{aligned}$$

Par l'énoncé, u_N converge simplement vers $h' \mapsto g(\beta, h')$. D'après la question 29, cette limite est dérivable en tout $h > 0$. En appliquant la question 4 de la première partie, on obtient

$$u'_N(h) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\partial g}{\partial h}(\beta, h).$$

Puis, par la question 28,

$$\frac{\partial g}{\partial h}(\beta, h) = x_*(\beta, h).$$

La limite cherchée vaut donc

$$x_*(\beta, h).$$

31. Pour $h > 0$, la question 24 montre que $x_*(\beta, h) \in]0, 1[$ et que c'est l'unique maximiseur de $\psi_{\beta, h}$. C'est donc un point critique intérieur :

$$\psi'_{\beta, h}(x_*(\beta, h)) = 0.$$

Or

$$\psi'_{\beta, h}(x) = 2\beta x + h - I'(x) \quad \text{avec} \quad I'(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \operatorname{argth}(x).$$

On obtient donc

$$\operatorname{argth}(x_*(\beta, h)) = h + 2\beta x_*(\beta, h).$$

En appliquant th des deux côtés,

$$x_*(\beta, h) = \text{th}(h + 2\beta x_*(\beta, h)).$$

32. Posons

$$x_h = x_*\left(\frac{1}{2}, h\right), \quad y_h = h + x_h.$$

La question 31 donne

$$x_h = \text{th}(h + x_h) = \text{th}(y_h).$$

Ainsi,

$$h = y_h - \text{th}(y_h).$$

Comme $h \rightarrow 0^+$, la continuité de $h \mapsto x_*(\frac{1}{2}, h)$ et la question 25 donnent $x_h \rightarrow 0$, donc $y_h \rightarrow 0$.

On utilise alors le développement limité en 0 :

$$\text{th}(y) = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

On en déduit

$$h = y_h - \left(y_h - \frac{y_h^3}{3} + o(y_h^3) \right) = \frac{y_h^3}{3} + o(y_h^3).$$

Donc

$$y_h^3 \sim 3h \quad \text{et par suite} \quad y_h \sim (3h)^{1/3}.$$

Enfin,

$$x_h = y_h - h.$$

Or $h = o((3h)^{1/3})$, donc $h = o(y_h)$ et ainsi

$$x_h \sim y_h \sim (3h)^{1/3}.$$

On conclut que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x_*\left(\frac{1}{2}, h\right)}{(3h)^{1/3}} = 1.$$

Conclusion. La deuxième partie décrit le modèle d'Ising unidimensionnel, sans transition de phase, tandis que la troisième partie fait apparaître le modèle de Curie–Weiss et sa transition critique en $\beta = \frac{1}{2}$: pour $h = 0$, la magnétisation nulle reste seule maximisante tant que $\beta \leq \frac{1}{2}$, puis deux états aimantés symétriques apparaissent lorsque $\beta > \frac{1}{2}$.