Correction détaillée

X/ENS 2026 – PSI – Mathématiques (XUSR)

Dans toute la correction, on reprend les notations du sujet. En particulier,

$$S(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x) = 0\}$$

et, pour $f \in \mathcal{E}$, on écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = \frac{1}{2}\,{}^tXMX - {}^tBX,$$

où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Partie I – Généralités sur les fonctions convexes et les fonctions minorées

1(a). La fonction

$$h(t) = f(x + t(y - x))$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par la règle de la chaîne,

$$h'(t) = \langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x\rangle .$$

En particulier,

$$\boxed{h'(0) = \langle \nabla f(x), y - x\rangle .}$$

1(b). Comme f est convexe, la fonction h l'est aussi. Pour tout $t \in]0, 1]$,

$$h(t) = f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y),$$

donc

$$\frac{h(t) - h(0)}{t} \leq f(y) - f(x).$$

En faisant tendre t vers 0^+, on obtient

$$\boxed{f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x\rangle .}$$

1(c). En appliquant l'inégalité précédente à (x, y) puis à (y, x), on trouve

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x\rangle$$

et

$$f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x - y\rangle = -\langle \nabla f(y), y - x\rangle .$$

En les additionnant, il vient

$$\boxed{\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq 0.}$$

1(d). Soit $x_0 \in S(f)$, donc $\nabla f(x_0) = 0$. D'après 1(b), pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle = 0.$$

Ainsi $f(x_0)$ est bien le minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.

Si maintenant $x \in S(f)$, alors x est lui aussi un minimum global ; on a donc nécessairement

$$\boxed{f(x) = f(x_0) \quad \text{pour tout } x \in S(f).}$$

1(e). Comme f est de classe C^1, l'application $x \mapsto \nabla f(x)$ est continue ; ainsi

$$S(f) = \nabla f^{-1}(\{0\})$$

est fermé.

Montrons que $S(f)$ est convexe. Soient $x, y \in S(f)$ et $\lambda \in [0,1]$. Posons

$$z = (1-\lambda)x + \lambda y.$$

D'après 1(d), $f(x) = f(y) = m$, où m est la valeur minimale de f. Par convexité,

$$f(z) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) = m.$$

Comme m est déjà le minimum global, on a en fait $f(z) = m$. Donc z est un point de minimum global et, f étant de classe C^1, on a $\nabla f(z) = 0$. Ainsi $z \in S(f)$.

On conclut que

$$\boxed{S(f) \text{ est une partie convexe fermée de } \mathbb{R}^n.}$$

2(a). Soit $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Considérons l'ensemble

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_\varepsilon(x) \leq f_\varepsilon(0)\}.$$

Comme f_ε est continue, K est fermé.

Si $x \in K$, alors

$$m + \varepsilon\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1} \leq f_\varepsilon(x) \leq f_\varepsilon(0) = f(0) + \varepsilon.$$

Donc

$$\varepsilon\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1} \leq f(0) + \varepsilon - m,$$

ce qui montre que K est borné. Ainsi K est compact.

La fonction continue f_ε atteint donc son minimum sur K en un point $x_\varepsilon \in K$. Si $x \notin K$, alors $f_\varepsilon(x) > f_\varepsilon(0) \geq f_\varepsilon(x_\varepsilon)$, donc x_ε réalise en fait le minimum global de f_ε sur $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\exists x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ f_\varepsilon(x) \geq f_\varepsilon(x_\varepsilon).}$$

2(b). Comme x_ε est un minimum global d'une fonction C^1, on a

$$\nabla f_\varepsilon(x_\varepsilon) = 0.$$

Or

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1},$$

donc

$$\nabla f_\varepsilon(x) = \nabla f(x) + \varepsilon \frac{x}{\sqrt{\|x\|^2 + 1}}.$$

En évaluant en x_ε, il vient

$$\nabla f(x_\varepsilon) = -\varepsilon \frac{x_\varepsilon}{\sqrt{\|x_\varepsilon\|^2 + 1}},$$

et par suite

$$\|\nabla f(x_\varepsilon)\| = \varepsilon \frac{\|x_\varepsilon\|}{\sqrt{\|x_\varepsilon\|^2 + 1}} \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|\nabla f(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon.}$$

2(c). Le résultat précédent montre que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\inf\{\|\nabla f(x)\| \mid x \in \mathbb{R}^n\} \leq \varepsilon.$$

Comme cette borne inférieure est toujours positive ou nulle, on obtient

$$\boxed{\inf\{\|\nabla f(x)\| \mid x \in \mathbb{R}^n\} = 0.}$$

Partie II – Le cas monodimensionnel

3(a). Par la question 2(c), appliquée à f_1 puis à f_2, on sait que

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} |f_1'(x)| = 0, \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} |f_2'(x)| = 0.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1'(x)^2 - f_2'(x)^2 = c.$$

Comme $f_2'(x)^2 \geq 0$, on a $c \leq f_1'(x)^2$ pour tout x, donc $c \leq 0$ en prenant l'infimum. De même,

$$f_2'(x)^2 = f_1'(x)^2 - c \geq -c,$$

si bien que $-c \leq 0$, donc $c \geq 0$. Finalement

$$\boxed{c = 0.}$$

On en déduit immédiatement

$$f_1'(x)^2 = f_2'(x)^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et donc

$$\boxed{S(f_1) = S(f_2).}$$

3(b). Chaque f_i est convexe et de classe C^1. En dimension 1, la question 1(c) donne, pour $x < y$,

$$(f_i'(y) - f_i'(x))(y - x) \geq 0.$$

Comme $y - x > 0$, il vient

$$f_i'(x) \leq f_i'(y).$$

Ainsi

$$\boxed{f_i' \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$$

3(c). L'ensemble

$$S(f_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid f_1'(x) = 0\}$$

est l'image réciproque de $\{0\}$ par une fonction croissante. Il s'agit donc d'un intervalle (éventuellement vide).

3(d). Posons
$$I = S(f_1) = S(f_2).$$

Premier cas : $I = \varnothing$. Alors f_1' et f_2' ne s'annulent jamais. La fonction continue
$$\rho(x) = \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$$
prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$. Comme $\mathbb{R}$ est connexe, elle est constante ; donc soit $f_1' = f_2'$, soit $f_1' = -f_2'$ sur $\mathbb{R}$.

Supposons $f_1' = -f_2'$. Comme f_1' est croissante et que f_2' l'est aussi, on obtient que f_1' et $-f_1'$ sont croissantes. Ainsi f_1' est constante. Si cette constante était non nulle, f_1 serait affine non constante, donc non minorée ; si elle était nulle, on aurait $I \neq \varnothing$. Dans tous les cas, c'est impossible. Donc nécessairement
$$\boxed{f_1' = f_2' \quad \text{sur } \mathbb{R}.}$$

Second cas : $I \neq \varnothing$. Sur I, on a évidemment $f_1' = f_2' = 0$. Sur toute composante connexe de $\mathbb{R} \setminus I$, les fonctions f_1' et f_2' gardent un signe constant. À gauche de I, elles sont toutes deux négatives ; à droite de I, elles sont toutes deux positives. Comme leurs carrés sont égaux, elles sont donc égales sur chaque composante de $\mathbb{R} \setminus I$, puis sur tout $\mathbb{R}$.

On a donc bien
$$\boxed{f_1' = f_2' \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

3(e). Comme $f_1' - f_2' = 0$ sur l'intervalle connexe $\mathbb{R}$, la fonction $f_1 - f_2$ est constante :
$$\boxed{f_1 - f_2 \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$$

4(a). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$R'(x) = 2g'(x)g''(x).$$
Si $x \in S(g)$, alors $g'(x) = 0$, donc $R'(x) = 0$ et $x \in S(R)$.

Réciproquement, si $x \in S(R)$, alors $R'(x) = 0$. Comme R est convexe, la question 1(d) appliquée à R montre que $R(x)$ est son minimum global. Or, d'après la question 2(c) appliquée à g, on a
$$\inf_{t \in \mathbb{R}} |g'(t)| = 0,$$
donc
$$\inf_{t \in \mathbb{R}} R(t) = 0.$$
Ainsi $R(x) = 0$, puis $g'(x) = 0$. Donc
$$\boxed{S(R) = S(g).}$$

4(b). On suppose ici $S(g) = \varnothing$. D'après 4(a), on a aussi $S(R) = \varnothing$.

La fonction g' est continue et ne s'annule jamais ; elle garde donc un signe constant sur $\mathbb{R}$.

Si $g' > 0$ sur $\mathbb{R}$. Alors $g' = \sqrt{R}$. Comme R est convexe et n'a pas de point critique, R' est croissante et ne s'annule jamais ; donc R est monotone. Supposons R décroissante. Alors g' est décroissante. Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x < x_0$, le théorème des accroissements finis donne un $c \in (x, x_0)$ tel que
$$g(x_0) - g(x) = g'(c)(x_0 - x) \geq g'(x_0)(x_0 - x).$$
Donc
$$g(x) \leq g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty,$$

contradiction avec le fait que g est minorée. Ainsi R est croissante, donc $g' = \sqrt{R}$ est croissante.

Si $g' < 0$ sur $\mathbb{R}$. Alors $g' = -\sqrt{R}$. Supposons maintenant R croissante. Alors g' est décroissante. Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x > x_0$, le théorème des accroissements finis donne un $c \in (x_0, x)$ tel que

$$g(x) - g(x_0) = g'(c)(x - x_0) \leq g'(x_0)(x - x_0),$$

et le membre de droite tend vers $-\infty$ quand $x \to +\infty$, contradiction. Donc R est décroissante, et $g' = -\sqrt{R}$ est encore croissante.

Dans tous les cas,

$$\boxed{g' \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$$

4(c). On suppose maintenant $S(g) \neq \varnothing$. Posons

$$I = S(g) = S(R).$$

Comme R est convexe, la question 1(e) appliquée à R montre que I est un intervalle. Sur I, on a $g' = 0$.

À gauche de I, la fonction R' est strictement négative (car croissante et nulle sur I), donc R y est décroissante. De plus $g' < 0$ sur cette zone, si bien que

$$g' = -\sqrt{R},$$

qui est une fonction croissante lorsque R décroît. À droite de I, on a au contraire $R' > 0$, donc R croissante, et comme $g' > 0$ on a

$$g' = \sqrt{R},$$

qui est croissante. Les valeurs à gauche sont négatives, celles sur I nulles, et celles à droite positives. Par conséquent

$$\boxed{g' \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$$

4(d). Fixons $x < y$ et définissons, pour $t \in [0, 1]$,

$$\varphi(t) = g((1-t)x + ty) - (1-t)g(x) - tg(y).$$

On a $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ et

$$\varphi'(t) = (y - x)g'((1-t)x + ty) + g(x) - g(y).$$

Comme g' est croissante et que l'application $t \mapsto (1-t)x + ty$ est croissante sur $[0, 1]$, la fonction φ' est croissante. Donc φ atteint son maximum sur $[0, 1]$ en une extrémité. Or les valeurs aux extrémités sont nulles. Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\varphi(t) \leq 0.$$

Autrement dit,

$$g((1-t)x + ty) \leq (1-t)g(x) + tg(y),$$

ce qui est exactement la convexité de g. Donc

$$\boxed{g \text{ est convexe.}}$$

5. La fonction $x \mapsto g_1'(x)^2$ est convexe ; d'après la question 4, la fonction g_1 l'est donc aussi.

De même,

$$g_2'(x)^2 = g_1'(x)^2 - c_1$$

est convexe, donc g_2 est convexe.

Les fonctions g_1 et g_2 sont alors de classe C^1, convexes, minorées, et vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_1'(x)^2 - g_2'(x)^2 = c_1.$$

La question 3 s'applique donc, et l'on obtient

$$\boxed{g_1 - g_2 \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$$

Partie III – Cas des fonctions quadratiques

6(a). On a
$$f(x) = \frac{1}{2}\,{}^t XMX - {}^t BX.$$
Comme M est symétrique,
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^{n} M_{k,j}x_j - B_k,$$
si bien que, en notation matricielle,
$$\boxed{{}^t(\nabla f(x)) = MX - B.}$$

6(b). D'après 6(a),
$$(Tf)(x) = \frac{1}{2}\|MX - B\|^2 - \frac{1}{2}\|B\|^2.$$
En développant,
$$\|MX - B\|^2 = {}^t XM^2X - 2\,{}^t(MB)X + \|B\|^2,$$
d'où
$$(Tf)(x) = \frac{1}{2}\,{}^t XM^2X - {}^t(MB)X.$$
La matrice M^2 est symétrique ; donc $Tf \in \mathcal{E}$.
De plus,
$$(Tf)(x) = \frac{1}{2}\|MX - B\|^2 - \frac{1}{2}\|B\|^2 \geq -\frac{1}{2}\|B\|^2,$$
si bien que Tf est minorée. Donc
$$\boxed{Tf \in \mathcal{E}_0.}$$

6(c). Soit $Y \in \mathrm{Im}(M)$ et $Z \in \mathrm{Ker}(M)$. Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = MX$. Alors
$$\langle Y, Z\rangle = {}^t YZ = {}^t X\,{}^t MZ = {}^t XMZ = 0,$$
car M est symétrique et $MZ = 0$. Donc
$$\mathrm{Im}(M) \subset (\mathrm{Ker}(M))^{\perp}.$$
Or
$$\dim((\mathrm{Ker}(M))^{\perp}) = n - \dim(\mathrm{Ker}(M)) = \mathrm{rg}(M) = \dim(\mathrm{Im}(M)).$$
On en déduit l'égalité
$$\boxed{(\mathrm{Ker}(M))^{\perp} = \mathrm{Im}(M).}$$
Comme deux sous-espaces orthogonaux sont en somme directe, on obtient finalement
$$\boxed{\mathrm{Im}(M) \oplus \mathrm{Ker}(M) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).}$$

6(d). L'application
$$\Phi : \mathrm{Im}(M) \longrightarrow \mathrm{Im}(M), \qquad X \longmapsto MX$$
est bien définie. Montrons qu'elle est injective. Si $X \in \mathrm{Im}(M)$ et $MX = 0$, alors $X \in \mathrm{Im}(M) \cap \mathrm{Ker}(M)$. Or, d'après 6(c),
$$\mathrm{Im}(M) \cap \mathrm{Ker}(M) = \{0\}.$$

Donc $X = 0$. Comme Φ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est un automorphisme. Ainsi

$$\boxed{X \in \mathrm{Im}(M) \longmapsto MX \in \mathrm{Im}(M) \text{ est un automorphisme de } \mathrm{Im}(M).}$$

6(e). Montrons les implications

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i).$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Supposons $f \in \mathcal{E}_0$.

D'abord, soit $Y \in \mathrm{Ker}(M)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(x + ty) = f(x) - t\,{}^t BY.$$

Si ${}^t BY \neq 0$, cette fonction affine en t n'est pas minorée sur $\mathbb{R}$, contradiction. Donc ${}^t BY = 0$ pour tout $Y \in \mathrm{Ker}(M)$, soit

$$\boxed{B \in (\mathrm{Ker}(M))^{\perp}.}$$

Ensuite, si l'on avait un $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^t XMX < 0$, alors

$$f(tx) = \frac{t^2}{2}\,{}^t XMX - t\,{}^t BX \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} -\infty$$

(le terme quadratique dominant étant négatif), contradiction. Donc

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t XMX \geq 0.}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Supposons maintenant $B \in (\mathrm{Ker}(M))^{\perp} = \mathrm{Im}(M)$ et ${}^t XMX \geq 0$ pour tout X. Comme $B \in \mathrm{Im}(M)$, il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MU = B$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\,{}^t XMX - {}^t(MU)X \\ &= \frac{1}{2}({}^t XMX - 2{}^t UMX + {}^t UMU) - \frac{1}{2}\,{}^t UMU \\ &= \frac{1}{2}\,{}^t(X-U)M(X-U) - \frac{1}{2}\,{}^t UMU. \end{aligned}$$

Comme la forme quadratique associée à M est positive, on en déduit que f est minorée. De plus,

$${}^t\nabla f(u) = MU - B = 0,$$

donc $S(f) \neq \varnothing$.

Enfin, pour $\lambda \in [0,1]$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) - f((1-\lambda)x + \lambda y) \\ &\qquad = \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\,{}^t(X-Y)M(X-Y) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc f est convexe. On a bien

$$\boxed{f \text{ est convexe et } S(f) \neq \varnothing.}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$. Si f est convexe et si $S(f) \neq \varnothing$, la question 1(d) montre que tout point de $S(f)$ est un point de minimum global. Donc f est minorée, c'est-à-dire

$$\boxed{f \in \mathcal{E}_0.}$$

Les trois propriétés sont donc équivalentes.

6(f). Supposons $f \in \mathcal{E}_0$. D'après 6(e), la forme quadratique

$$q(X) = {}^tXMX$$

est positive sur tout $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrons qu'elle est même strictement positive sur $\mathrm{Im}(M) \setminus \{0\}$. Soit donc $X \in \mathrm{Im}(M) \setminus \{0\}$ et supposons $q(X) = 0$. Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq q(X + tY) = q(X) + 2t\,{}^tXMY + t^2 q(Y) = 2t\,{}^tXMY + t^2 q(Y).$$

Comme cette expression est positive pour tout t, son terme linéaire doit être nul ; donc

$${}^tXMY = 0 \qquad \text{pour tout } Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

En prenant $Y = MX$, on obtient

$$0 = {}^tXM(MX) = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2,$$

donc $MX = 0$, i.e. $X \in \mathrm{Ker}(M)$. Comme $X \in \mathrm{Im}(M)$, on a $X \in \mathrm{Im}(M) \cap \mathrm{Ker}(M) = \{0\}$, contradiction.

La fonction continue q est donc strictement positive sur la sphère unité de $\mathrm{Im}(M)$, compacte. Elle y atteint un minimum strictement positif α. Ainsi, pour tout $X \in \mathrm{Im}(M)$,

$${}^tXMX = q(X) \geq \alpha \|X\|^2.$$

On a donc bien

$$\boxed{\exists \alpha > 0\ \forall X \in \mathrm{Im}(M), \quad {}^tXMX \geq \alpha \|X\|^2.}$$

7. Soit $g \in \mathcal{E}_0$ et écrivons

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\,{}^tXNX - {}^tCX,$$

où N est symétrique et $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après 6(e), la matrice N est positive et $C \in (\mathrm{Ker}(N))^\perp$. Par 6(c),

$$(\mathrm{Ker}(N))^\perp = \mathrm{Im}(N).$$

Donc $C \in \mathrm{Im}(N)$.

Par le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ tels que

$$N = P\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,{}^tP.$$

Posons

$$M = P\ \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})\,{}^tP.$$

Alors M est symétrique positive et

$$M^2 = N.$$

De plus $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^2) = \mathrm{Ker}(N)$, donc, par 6(c),

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Im}(M^2) = \mathrm{Im}(N).$$

Comme $C \in \mathrm{Im}(N) = \mathrm{Im}(M)$, il existe $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$MB = C.$$

Considérons alors $f \in \mathcal{E}$ définie par le couple (M, B). D'après 6(e), on a $f \in \mathcal{E}_0$. Enfin, 6(b) donne

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\,{}^tXM^2X - {}^t(MB)X = \frac{1}{2}\,{}^tXNX - {}^tCX = g(x).$$

Ainsi l'application

$$\boxed{T : f \in \mathcal{E}_0 \longmapsto Tf \in \mathcal{E}_0 \text{ est surjective.}}$$

8. Soient M_1 et M_2 deux matrices symétriques positives telles que

$$M_1^2 = M_2^2 =: N.$$

La matrice N est symétrique positive. Par le théorème spectral, on peut écrire

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(N)} E_\lambda,$$

où $E_\lambda = \mathrm{Ker}(N - \lambda I_n)$.

Comme $M_i N = N M_i$ (puisque $NM_i = M_i^3 = M_i N$), chaque sous-espace propre E_λ de N est stable par M_i.

— Si $\lambda = 0$, alors sur E_0 on a $M_i^2 = 0$, donc $M_i = 0$.
— Si $\lambda > 0$, la restriction $u_i = M_i|_{E_\lambda}$ est un endomorphisme symétrique positif de E_λ vérifiant

$$u_i^2 = \lambda\,\mathrm{Id}_{E_\lambda}.$$

Toute valeur propre μ de u_i vérifie alors $\mu^2 = \lambda$; comme u_i est positif, on a nécessairement $\mu \geq 0$, donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. Ainsi $u_i = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}_{E_\lambda}$.

Les matrices M_1 et M_2 coïncident donc sur chaque E_λ, d'où

$$\boxed{M_1 = M_2.}$$

9. Supposons

$$Tf_1 = Tf_2$$

avec $f_1, f_2 \in \mathcal{E}_0$. Soient (M_1, B_1) et (M_2, B_2) les couples qui les caractérisent.

Par 6(b), l'égalité $Tf_1 = Tf_2$ donne

$$M_1^2 = M_2^2 \qquad \text{et} \qquad M_1B_1 = M_2B_2.$$

D'après 6(e), les matrices M_1 et M_2 sont positives. La question 8 donne donc

$$M_1 = M_2 =: M.$$

On a alors

$$M(B_1 - B_2) = 0,$$

c'est-à-dire $B_1 - B_2 \in \mathrm{Ker}(M)$. Mais, d'après 6(e), $B_1, B_2 \in (\mathrm{Ker}(M))^\perp$, donc aussi $B_1 - B_2 \in (\mathrm{Ker}(M))^\perp$. Ainsi

$$B_1 - B_2 \in \mathrm{Ker}(M) \cap (\mathrm{Ker}(M))^\perp = \{0\},$$

d'où $B_1 = B_2$. Finalement $f_1 = f_2$.

Ainsi l'application

$$\boxed{T : f \in \mathcal{E}_0 \longmapsto Tf \in \mathcal{E}_0 \text{ est injective.}}$$

10. Les questions 7 et 9 montrent que l'application

$$\boxed{T : \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \text{ est bijective.}}$$

En particulier, si $f, g \in \mathcal{E}_0$ vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|\nabla f(x)\| = \|\nabla g(x)\|,$$

alors $Tf = Tg$, donc $f = g$ par injectivité de T. On a ainsi démontré le théorème annoncé dans le cas des fonctions quadratiques appartenant à $\mathcal{E}_0$.

Partie IV – Un cas un peu plus général

On suppose dans toute cette partie que f et g sont deux fonctions de classe C^1, convexes, minorées, telles que $f+g \in \mathcal{E}$, que $S(f) \neq \varnothing$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|\nabla f(x)\|^2 - \|\nabla g(x)\|^2$$

soit constante. On note

$$h = f + g, \qquad \psi = f - g,$$

et

$$\inf h = \inf\{h(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

On note enfin (M, B) le couple qui caractérise h.

11. Les fonctions f et g sont convexes et minorées ; leur somme $h = f + g$ est donc encore convexe et minorée. Comme, de plus, $h \in \mathcal{E}$ par hypothèse, on obtient bien

$$\boxed{h \in \mathcal{E}_0.}$$

12. Il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|\nabla f(x)\|^2 - \|\nabla g(x)\|^2 = c.$$

Soit $x_0 \in S(f)$, qui existe par hypothèse. Alors

$$c = \|\nabla f(x_0)\|^2 - \|\nabla g(x_0)\|^2 = -\|\nabla g(x_0)\|^2 \leq 0.$$

D'un autre côté, g est minorée ; la question 2(c) montre donc que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|\nabla g(x)\| = 0.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\nabla g(x)\| \leq \varepsilon$, et alors

$$c = \|\nabla f(x)\|^2 - \|\nabla g(x)\|^2 \geq -\|\nabla g(x)\|^2 \geq -\varepsilon^2.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $c \geq 0$. Donc $c = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{\|\nabla f(x)\| = \|\nabla g(x)\|.}$$

13. Comme les normes des gradients coïncident, on a immédiatement

$$\nabla f(x) = 0 \iff \nabla g(x) = 0,$$

donc

$$S(f) = S(g).$$

Montrons maintenant que $S(h) = S(f)$. Soit $u \in S(f) = S(g)$; un tel point existe. Alors

$$\nabla h(u) = \nabla f(u) + \nabla g(u) = 0,$$

donc $u \in S(h)$ et en particulier $S(h) \neq \varnothing$.

Réciproquement, soit $x \in S(h)$. Alors x est un minimum global de h (question 1(d) appliquée à h, qui est convexe d'après 11). On a donc

$$h(x) = h(u).$$

Mais u minimise f et g séparément, donc

$$f(x) \geq f(u), \qquad g(x) \geq g(u),$$

et

$$f(x) + g(x) = f(u) + g(u).$$

Il y a donc égalité dans chacune de ces deux inégalités :

$$f(x) = f(u), \qquad g(x) = g(u).$$

Ainsi x est un minimum global de f et de g, donc $x \in S(f) \cap S(g)$.

On a finalement

$$\boxed{S(h) = S(f) = S(g).}$$

14(a). Pour $t > 0$, on a

$$tz(t) = y(t) - y(0).$$

Comme y est de classe C^1, on obtient immédiatement

$$\lim_{t \to 0^+} z(t) = y'(0),$$

si bien que z est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $t > 0$, en dérivant l'égalité $tz(t) = y(t) - y(0)$, on obtient

$$z(t) + tz'(t) = y'(t).$$

En prenant le produit scalaire avec $z(t)$,

$$\langle z(t), y'(t) \rangle = \|z(t)\|^2 + t \langle z(t), z'(t) \rangle = \|z(t)\|^2 + \frac{t}{2} (\|z(t)\|^2)'.$$

Ainsi, pour tout $A \geq 0$,

$$2 \int_0^A \langle z(t), y'(t) \rangle \, dt = 2 \int_0^A \|z(t)\|^2 \, dt + \int_0^A t (\|z(t)\|^2)' dt.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_0^A t (\|z(t)\|^2)' dt = A \|z(A)\|^2 - \int_0^A \|z(t)\|^2 \, dt.$$

Donc

$$2 \int_0^A \langle z(t), y'(t) \rangle \, dt = \int_0^A \|z(t)\|^2 \, dt + A \|z(A)\|^2 \geq \int_0^A \|z(t)\|^2 \, dt.$$

On a bien

$$\boxed{\int_0^A \|z(t)\|^2 \, dt \leq 2 \int_0^A \langle z(t), y'(t) \rangle \, dt.}$$

14(b). Posons

$$J_A = \int_0^A \|z(t)\|^2 \, dt, \qquad K_A = \int_0^A \|y'(t)\|^2 \, dt.$$

D'après 14(a) et l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$J_A \leq 2 \left(\int_0^A \|z(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^A \|y'(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2} = 2 \sqrt{J_A} \sqrt{K_A}.$$

Si $J_A > 0$, on peut diviser par $\sqrt{J_A}$ et obtenir

$$\sqrt{J_A} \leq 2\sqrt{K_A},$$

donc

$$J_A \leq 4K_A.$$

Cette inégalité reste vraie si $J_A = 0$. Par hypothèse,

$$\sup_{A\geq 0} K_A = \int_0^{+\infty} \left\|y'(t)\right\|^2 dt < +\infty,$$

donc la famille $(J_A)_{A\geq 0}$ est croissante et majorée. Par conséquent, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left\|z(t)\right\|^2 dt$$

converge et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left\|z(t)\right\|^2 dt \leq 4\int_0^{+\infty} \left\|y'(t)\right\|^2 dt.}$$

14(c). Pour tout $t \geq 0$, on a

$$y(t) = y(0) + tz(t),$$

donc, par l'inégalité usuelle $\left\|a+b\right\|^2 \leq 2\left\|a\right\|^2 + 2\left\|b\right\|^2$,

$$\left\|y(t)\right\|^2 \leq 2\left\|y(0)\right\|^2 + 2t^2\left\|z(t)\right\|^2.$$

En divisant par t^2+1 puis en intégrant sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left\|y(t)\right\|^2}{t^2+1}\,dt \leq 2\left\|y(0)\right\|^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} + 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^2+1}\left\|z(t)\right\|^2 dt.$$

Comme $\frac{t^2}{t^2+1} \leq 1$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$, on en déduit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left\|y(t)\right\|^2}{t^2+1}\,dt \leq \pi\left\|y(0)\right\|^2 + 2\int_0^{+\infty} \left\|z(t)\right\|^2 dt.$$

En utilisant 14(b), il vient finalement

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\left\|y(t)\right\|^2}{t^2+1}\,dt \leq 8\int_0^{+\infty} \left\|y'(t)\right\|^2 dt + \pi\left\|y(0)\right\|^2.}$$

En particulier, l'intégrale généralisée converge.

15(a). On rappelle que $h \in \mathcal{E}_0$ (question 11) et que, par 6(a),

$${}^t\nabla h(x) = MX - B.$$

Comme $Y'(t) = -MY(t) + B = -(MY(t) - B)$, on a

$$Y'(t) = -{}^t\nabla h(y(t)).$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$F'(t) = \langle \nabla h(y(t)), y'(t)\rangle = -\left\|Y'(t)\right\|^2 \leq 0.$$

Donc F est décroissante.

Soit maintenant $v \in S(h)$ et notons $V = {}^t v$. Comme $v \in S(h)$, on a

$$MV - B = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} D'(t) &= 2\langle Y'(t), Y(t) - V\rangle \\ &= -2\langle M(Y(t) - V), Y(t) - V\rangle . \end{aligned}$$

Or, par 6(e), la matrice M est positive puisque $h \in \mathcal{E}_0$. Donc

$$D'(t) \leq 0.$$

Ainsi

$$\boxed{F \text{ et } D \text{ sont décroissantes sur } [0, +\infty[.}$$

15(b). Comme $h \in \mathcal{E}_0$, la question 6(e) montre que $B \in (\mathrm{Ker}(M))^{\perp} = \mathrm{Im}(M)$. Il existe donc $U \in \mathrm{Im}(M)$ tel que

$$MU = B.$$

D'après 6(c),

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(M) \oplus \mathrm{Im}(M),$$

on peut donc écrire de manière unique

$$Y(0) = Y_0 + Y_1, \qquad Y_0 \in \mathrm{Ker}(M), \quad Y_1 \in \mathrm{Im}(M).$$

Posons

$$Z(t) = Y(t) - U - Y_0.$$

Alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} Z'(t) &= Y'(t) \\ &= -MY(t) + B \\ &= -M(Z(t) + U + Y_0) + B \\ &= -MZ(t) - MU - MY_0 + B \\ &= -MZ(t). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad Z'(t) = -MZ(t).}$$

Il reste à voir que $Z(t) \in \mathrm{Im}(M)$ pour tout $t \geq 0$. Comme $Z(0) = Y_1 \in \mathrm{Im}(M)$, écrivons pour chaque t

$$Z(t) = Z_0(t) + Z_1(t), \qquad Z_0(t) \in \mathrm{Ker}(M),\ Z_1(t) \in \mathrm{Im}(M).$$

Alors

$$Z'(t) = -MZ_1(t) \in \mathrm{Im}(M),$$

si bien que la composante sur $\mathrm{Ker}(M)$ de $Z'(t)$ est nulle. Donc Z_0 est constante. Or $Z_0(0) = 0$, donc $Z_0(t) = 0$ pour tout t. Finalement,

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad Z(t) \in \mathrm{Im}(M).}$$

15(c). Posons

$$\omega(t) = \|Z(t)\|^2 .$$

Alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\omega'(t) = 2\langle Z'(t), Z(t)\rangle = -2\langle MZ(t), Z(t)\rangle = -2\,{}^t Z(t) M Z(t).$$

Or $Z(t) \in \mathrm{Im}(M)$ d'après 15(b). La question 6(f) fournit donc une constante $\alpha > 0$ telle que

$$^{t}Z(t)MZ(t) \geq \alpha \left\|Z(t)\right\|^2 = \alpha\omega(t).$$

Ainsi

$$\omega'(t) + 2\alpha\omega(t) \leq 0.$$

En posant $\beta = 2\alpha > 0$, on obtient

$$\boxed{\exists \beta > 0 \ \forall t \geq 0, \quad \omega'(t) + \beta\omega(t) \leq 0.}$$

15(d). Considérons la fonction

$$t \longmapsto e^{\beta t}\omega(t).$$

Sa dérivée vaut

$$\left(e^{\beta t}\omega(t)\right)' = e^{\beta t}(\omega'(t) + \beta\omega(t)) \leq 0.$$

Elle est donc décroissante sur $[0, +\infty[$, ce qui donne, pour tout $t \geq 0$,

$$e^{\beta t}\omega(t) \leq \omega(0).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad \omega(t) \leq \omega(0)e^{-\beta t}.}$$

15(e). D'après 15(d), on a $\omega(t) \to 0$, donc

$$Z(t) \longrightarrow 0.$$

Comme

$$Y(t) = Z(t) + U + Y_0,$$

on en déduit que $Y(t)$ converge vers

$$Y_\infty = U + Y_0.$$

De plus,

$$MY_\infty = MU + MY_0 = B + 0 = B,$$

donc $Y_\infty \in S(h)$ par 6(a). Ainsi

$$\boxed{\exists Y_\infty \in S(h) \text{ tel que } \lim_{t \to +\infty} Y(t) = Y_\infty.}$$

15(f). La fonction $F(t) = h(y(t))$ est décroissante et minorée par $\inf h$, donc elle admet une limite finie. D'après 15(e), on a $y(t) \to y_\infty$ avec $y_\infty \in S(h)$; par continuité de h,

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = h(y_\infty) = \inf h.$$

Or, d'après 15(a),

$$F'(t) = -\left\|y'(t)\right\|^2.$$

En intégrant sur $[0, A]$, on obtient

$$\int_0^A \left\|y'(t)\right\|^2 dt = F(0) - F(A) = h(y(0)) - h(y(A)).$$

En faisant tendre A vers $+\infty$,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left\|y'(t)\right\|^2 dt = h(y(0)) - \inf h.}$$

Cette intégrale converge donc.

On peut alors appliquer la question 14(c) à la fonction y ; il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\|y(t)\|^2}{t^2+1}\, dt \leq 8 \int_0^{+\infty} \|y'(t)\|^2\, dt + \pi \|y(0)\|^2 = 8(h(y(0)) - \inf h) + \pi \|y(0)\|^2 .$$

Ainsi

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\|y(t)\|^2}{t^2+1}\, dt \leq 8(h(y(0)) - \inf h) + \pi \|y(0)\|^2 .}$$

16. On a

$$\nabla\psi = \nabla f - \nabla g, \qquad \nabla h = \nabla f + \nabla g.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \nabla\psi(x), \nabla h(x)\rangle = \langle \nabla f(x) - \nabla g(x), \nabla f(x) + \nabla g(x)\rangle = \|\nabla f(x)\|^2 - \|\nabla g(x)\|^2 .$$

D'après la question 12, cette différence est nulle. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla\psi(x), \nabla h(x)\rangle = 0.}$$

Le long d'une solution y du système, on a $y'(t) = -\nabla h(y(t))$. Par conséquent,

$$\frac{d}{dt}\psi(y(t)) = \langle \nabla\psi(y(t)), y'(t)\rangle = -\langle \nabla\psi(y(t)), \nabla h(y(t))\rangle = 0.$$

Donc

$$\boxed{t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \psi(y(t)) \text{ est constante.}}$$

17. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$ et considérons la solution Y du système différentiel

$$Y'(t) = -MY(t) + B, \qquad Y(0) = X.$$

La question 15(e) montre qu'il existe un vecteur $Y_\infty \in S(h)$ tel que

$$Y(t) \longrightarrow Y_\infty.$$

D'après 16, la fonction $t \mapsto \psi(y(t))$ est constante ; donc

$$\psi(x) = \psi(y(0)) = \lim_{t\to+\infty} \psi(y(t)) = \psi(y_\infty).$$

Or, d'après la question 13,

$$S(h) = S(f) = S(g).$$

Sur cet ensemble, la question 1(d) montre que f est constante et que g l'est aussi ; par conséquent, $\psi = f - g$ est constante sur $S(h)$. La quantité $\psi(y_\infty)$ ne dépend donc pas du point de départ x.

On a ainsi montré que ψ est constante sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire

$$\boxed{f - g \text{ est constante sur } \mathbb{R}^n.}$$

On conclut donc que, sous les hypothèses de la partie IV, le théorème annoncé dans l'énoncé est vrai.

Fin de la correction.