Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

À rendre avec la copie 1 feuille de papier millimétré.

AlgèBrille

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte et **les questions non correctement référencées ne seront pas notées**. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Le sujet est composé de 2 exercices indépendants.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.

- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est strictement interdit. Les surveillants et surveillantes se réservent le droit de les confisquer.

- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.

- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.

- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance. La présence d'une information d'identification en dehors du cartouche donnera lieu à un point de pénalité et la page concernée pourra être soustraite de la correction.

Premier exercice.

On rappelle que si P est un polynôme et k un entier naturel, $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de P.

Dans cet exercice, on considère :

- l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3.
- l'ensemble $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X]\,;\, 6P(0) = P^{(3)}(0)\}$.
- l'application f définie sur H par

$$\forall P \in H,\ f(P) = (X + X^2)P(0) - \frac{1}{2}(X^3 + X^2 - X + 1)P'(0) - \frac{1}{4}(X^3 - X^2 + X + 1)P''(0)$$

Partie A

1. Démontrer que H est un espace vectoriel dont on précisera une base et la dimension.
2. Démontrer que l'application h définie sur H par
$$\forall P \in H,\ h(P) = P'(0)$$
est linéaire.
Dans quel espace vectoriel h prend-elle ses valeurs ? On sera le plus précis possible.
3. On admet que f est linéaire. Démontrer que f est un endomorphisme de H.

Partie B

4. Donner la définition d'un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Soit φ une application définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$, linéaire par rapport à sa première variable et symétrique. Démontrer soigneusement que φ est bilinéaire.
6. Démontrer de deux façons différentes que si un polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifie
$$P(0) = P'(0) = P''(0) = P^{(3)}(0) = 0$$
alors P est le polynôme nul.

On considère désormais l'application φ définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$ par

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2,\ \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)}{(k!)^2}.$$

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ et on suppose désormais que $\mathbb{R}_3[X]$ est muni de ce produit scalaire.

7. Vérifier que X et X^2 sont deux vecteurs orthogonaux et unitaires de H.
8. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de H contenant les deux vecteurs X et X^2. Les éléments de cette base seront classés par ordre <u>décroissant</u> de degré.
9. (a) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme constant 1 sur H.
   (b) En déduire une base de l'orthogonal de H dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Partie C

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et de sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la rotation r d'axe Δ dirigé et orienté par le vecteur $\vec{u} = \vec{j} - \vec{k}$ et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$. On note R la matrice de r dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

10. Déterminer une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (\vec{u}\,', \vec{v}\,', \vec{w}\,')$ telle que $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont colinéaires et de même sens.
    Donner la matrice R' de r dans cette base.
11. Déterminer R.
12. Quels sont les endomorphismes canoniquement associés à $R^\top$, R^{2025} et à R^{2026} ? On donnera deux réponses distinctes pour cette dernière matrice.

Partie D

13. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ déterminée dans la partie B.
14. Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ de H à préciser dans laquelle la matrice de f est :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
    La base $\mathcal{B}''$ est-elle orthogonale pour le produit scalaire φ de la partie B ?

Deuxième exercice.

Dans les 3 premières parties de cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O\,; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Dans la dernière partie de l'exercice, indépendante des 3 premières, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O\,; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

Partie A

1. Soient a et b deux réels strictement positifs.
   (a) Donner la nature et le paramétrage usuel de la conique d'équation cartésienne
   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
   (b) Donner la nature et le paramétrage usuel de chaque branche de la conique d'équation cartésienne
   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
2. Soit F un point, $\mathcal{D}$ une droite ne contenant pas F et ε un réel strictement positif.
   (a) Donner la définition de la conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité ε.
   (b) Quelle est la nature de cette conique ?
3. Soient M et M' deux points d'affixes complexes respectives z et z' et θ un nombre réel tels que $z' = e^{i\theta} z$.
   Quelle transformation permet de passer de M à M' ?

Partie B

On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z vérifiant :

$$|z| = \left| z + \overline{z}\, e^{i\frac{\pi}{3}} - 3e^{i\frac{\pi}{6}} \right|$$

4. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $\sqrt{3}x + y = 3$.
   Pour tout point M du plan, on note M' son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$.
   (a) Déterminer l'expression des coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.
   (b) En déduire que si z est l'affixe complexe de M et z' celle de M' alors :
   $$z' = \frac{1}{2}\left(z - \overline{z}\, e^{i\frac{\pi}{3}} + 3e^{i\frac{\pi}{6}} \right)$$
5. Exprimer $z - z'$ en fonction de z et $\overline{z}$.
6. En déduire que $\mathcal{C}$ est une conique dont on précisera la nature, un foyer, une directrice et l'excentricité.

Partie C AlgèBrille

Soit $\vec{u}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$ dont l'abscisse est positive.

7. Déterminer l'angle $\alpha = (\vec{e_1}, \vec{u})$.
8. On note $\mathcal{C}'$ l'ensemble des points N d'affixes complexes Z tels que le point M d'affixe complexe $z = e^{i\alpha} Z$ appartienne à $\mathcal{C}$ (α est l'angle déterminé à la question 7.).
   (a) Démontrer que
   $$N \in \mathcal{C}' \Leftrightarrow |Z| = \left| Z + \overline{Z} - 3 \right|$$
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}'$ est
   $$3x^2 - 12x - y^2 + 9 = 0$$
   (c) Donner les éléments caractéristiques de la conique $\mathcal{C}'$ à savoir :
   - les coordonnées (s'il y a lieu) du centre, des sommets ;
   - une équation (s'il y a lieu) des asymptotes.

   On rappelle que les sommets d'une conique sont les points d'intersection de la conique avec ses axes de symétrie.
   (d) Donner une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}'$ au point G de coordonnées $(0, 3)$.
9. (a) Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ ainsi que les éléments déterminés dans la question 8.(c).
   Unité : 1cm (minimum).
   On utilisera la feuille de papier millimétré fournie.
   (b) Quelle transformation permet d'obtenir la courbe $\mathcal{C}$ à partir de la courbe $\mathcal{C}'$?
   Le tracé de $\mathcal{C}$ n'est pas demandé.

Partie D

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la courbe $\mathcal{C}''$ dont un système d'équations cartésiennes est $\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - y^2 = 3 \\ z = 1 \end{array} \right.$
ainsi que la surface S d'équation $-3x^2 + y^2 + 3z^2 = 0$.

10. Démontrer que $\mathcal{C}'' \subset S$.

11. (a) Déterminer les points réguliers de S.

    (b) Déterminer une équation du plan tangent à S au point J de coordonnées $(2, -3, -1)$.

12. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère les plans P_λ d'équation cartésienne $2x + \sqrt{2}z = \lambda$ et on note $\mathcal{C}_\lambda$ l'intersection de S et P_λ.

    (a) Démontrer que $\mathcal{C}_\lambda$ est soit vide, soit un cercle.
    On pourra utiliser que
    $$-3x^2 + y^2 + 3z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (2x - \sqrt{2}z)(2x + \sqrt{2}z).$$
    et/ou se placer dans un repère orthonormé dont le troisième vecteur est colinéaire à $2\vec{e}_1 + \sqrt{2}\vec{e}_3$.

    (b) Cela permet-il de dire que S est une surface de révolution ?

13. On note $\mathcal{C}''_+$ l'ensemble des points de $\mathcal{C}''$ d'abscisse positive.
Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution Σ obtenue en faisant tourner $\mathcal{C}''_+$ autour de l'axe des abscisses (Ox).