Mathématiques 1

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

PC **2026**

4 heures — Calculatrice autorisée

Découverte de la planète Neptune

Les quatre parties de ce problème sont indépendantes, le candidat peut les traiter dans l'ordre de son choix. Dans tout ce problème, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à 3 lignes et à 3 colonnes à coefficients réels.

Urbain Le Verrier (source Wikipedia)

AlgèBrille

- Urbain Le Verrier (1811-1877) doit sa célébrité à la découverte de la planète Neptune en 1846. À cette époque, seules 7 planètes sont alors connues (Mercure, Vénus, La Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus). Les mouvements des planètes sont régis par les lois de Newton. Quand on ne néglige pas les interactions entre planètes, les équations caractérisant les trajectoires des planètes sont pour l'instant impossibles à résoudre. Lagrange puis Laplace ont apporté des simplifications mais n'ont pas abouti. Le Verrier a conclu leurs travaux et établi les trajectoires des 7 planètes alors connues.
- La trajectoire que Le Verrier prédit concernant la planète Uranus contredit les observations de Herschel effectuées en 1781 : Uranus ne se trouve pas là où elle devrait être ! Ces écarts inexpliqués entre la position réelle d'Uranus sur son orbite et celle déduite par la théorie suggèrent l'existence d'un corps céleste inconnu, plus lointain, exerçant une force gravitationnelle perturbatrice. Plus tard, un astronome allemand, Johann Galle, observe pour la première fois la planète à l'origine de cette anomalie, à partir des calculs de Le Verrier. Elle est baptisée Neptune et on considère que c'est Le Verrier (et non Galle) qui l'a découverte.

Partie A – Étude du mouvement d'une planète seulement soumise à l'attraction du soleil

- On se place dans l'écliptique qui est le plan P d'origine le soleil et contenant le système solaire. On munit ce plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et, si M et N sont deux points de ce plan, MN désigne la longueur du segment d'extrémités M et N.
- Soit $(a,c)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $c<a$. On pose $b=\sqrt{a^2-c^2}$. On appelle F le point de coordonnées $(c,0)$ et F' le point de coordonnées $(-c,0)$.
- On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de P tels que $MF+MF'=2a$. On dit que $\mathcal{E}$ est une ellipse de foyers F et F'.
- Dans cette partie, x et y sont deux réels et M est le point de P de coordonnées (x,y).

I – Équation réduite de $\mathcal{E}$

Q1. Rappeler l'inégalité triangulaire mettant en jeu les distances MF, MF' et FF' puis prouver que :

$$FF' \geqslant |MF - MF'|.$$

Q2. En déduire que $MF - MF' - 2a \neq 0$ et $MF - MF' + 2a \neq 0$.

Q3. En déduire l'équivalence suivante :

$$M \in \mathcal{E} \iff (MF' + MF - 2a) \times (MF' + MF + 2a) \times (MF - MF' - 2a) \times (MF - MF' + 2a) = 0.$$

Q4. En déduire l'équivalence suivante : $M \in \mathcal{E} \iff ((MF')^2 + (MF)^2 - 4a^2)^2 = 4(MF')^2(MF)^2$.

Q5. En déduire que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M du plan P dont les coordonnées (x, y) vérifient $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

II – Étude d'une fonction

Soit $f : \begin{cases} [0, a] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} \end{cases}$.

Q6. Dresser le tableau de variations de f et donner les équations des tangentes à C_f, la courbe représentative de f, en $(0, b)$ et $(a, 0)$.

Q7. Tracer C_f.

Q8. Représenter $\mathcal{E}$. On y placera aussi les points A, A', B, B' de cordonnées respectives $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$, ainsi que F et F'. On dit que $[A'A]$ est le grand axe de $\mathcal{E}$ et $[B'B]$ est le petit axe de $\mathcal{E}$.

AlgèBrille

III – Paramètres de l'ellipse

On pose $e = \dfrac{c}{a}$, on appelle excentricité de $\mathcal{E}$ cette quantité.

Q9. Montrer que $e \in]0, 1[$ puis exprimer c et b en fonction de a et e.

Q10. Donner l'allure de l'ellipse $\mathcal{E}$ suivant que e soit proche de 0 ou de 1.

Partie B – Étude du mouvement des planètes massives du système solaire sans négliger les interactions

- Les interactions entre les planètes existent et ne sont pas toujours négligeables. Pour les planètes massives, Le Verrier a pu toutefois négliger les petites planètes (Mercure, Vénus, Terre et Mars) et ne tenir compte que des planètes massives alors connues (Uranus, Jupiter et Saturne). Nous allons ainsi simplifier le problème et nous placer dans le cas où il n'y aurait que trois planètes.

- Pour chacune des trois planètes massives, Le Verrier définit des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^∞, permettant, sans entrer dans des détails trop techniques, de décrire les trajectoires de ces planètes. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, on définit des fonctions h_i et l_i, fonctions du temps et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+$ (h_1 et l_1 pour Uranus, h_2 et l_2 pour Jupiter, et enfin h_3 et l_3 pour Saturne). Les équations physiques de Lagrange et Laplace disent qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (dont les coefficients sont des réels constants et ne dépendent donc pas du temps) telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} G_t & = B \times L_t \\ K_t & = -B \times H_t \end{cases} \quad \text{avec } H_t = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix}, L_t = \begin{pmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ l_3(t) \end{pmatrix}, G_t = \begin{pmatrix} h_1'(t) \\ h_2'(t) \\ h_3'(t) \end{pmatrix} \text{ et } K_t = \begin{pmatrix} l_1'(t) \\ l_2'(t) \\ l_3'(t) \end{pmatrix}$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $F_t = \begin{pmatrix} h_1''(t) \\ h_2''(t) \\ h_3''(t) \end{pmatrix}$.

Q11. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $F_t = A \times H_t$ avec $A = -B^2$. On suppose uniquement dans cette partie que A a trois valeurs propres réelles λ_1, λ_2 et λ_3 telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$.

Q12. Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = Q \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \times Q^{-1}$.

Q13. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose : $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = Y_t$ avec $Y_t = Q^{-1} \times H_t$, la matrice Q ayant été définie dans la question précédente. Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, montrer que y_i est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 qu'on précisera.

Q14. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, donner l'expression générale de $y_i(t)$ à des constantes multiplicatives près.

Q15. Montrer que $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et exprimer h_1, h_2, h_3 puis l_1, l_2, l_3 en fonction de y_1, y_2, y_3 et des matrices B et Q.

Partie C – Méthode de Le Verrier pour déterminer les valeurs propres

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace.

I – Résolution des équations

Q16. Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ et en déduire que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblables ont même trace.

On pose : $A = Q \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \times Q^{-1}$ avec $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On note :

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad S_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad \text{et} \quad S_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3.$$

On note P_A le polynôme caractéristique de A, et on pose :

AlgèBrille

$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3 = P_A.$$

Q17. Exprimer $\mathrm{Tr}(A)$, $\mathrm{Tr}(A^2)$ et $\mathrm{Tr}(A^3)$ en fonction de S_1, S_2 et S_3.

Q18. Exprimer P_A puis α_0, α_1 et α_2 en fonction de λ_1, λ_2 et λ_3.

Q19. Exprimer α_1 et α_2 en fonction de S_1 et S_2. On admet que $\alpha_0 = \dfrac{3S_1S_2 - S_1^3 - 2S_3}{6}$.

Le Verrier a ainsi, sans notion de déterminant ni de rang, explicité le polynôme caractéristique de la matrice A intervenant dans ses calculs grâce aux traces de A, A^2 et A^3. Une fois le polynôme caractéristique calculé, il en a déduit le spectre de A.

II – Étude d'un cas particulier

On appelle A la matrice $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 11 & 13 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ et R le polynôme $X^3 + X^2 - 14X - 24$.

Q20. Justifier l'existence d'une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et d'une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telles que $A = QTQ^{-1}$. Les relations trouvées à la question Q19 sont-elles encore valables ici ?

Q21. Déterminer $\mathrm{Tr}(A)$, $\mathrm{Tr}(A^2)$ et $\mathrm{Tr}(A^3)$ et en déduire que le polynôme caractéristique de A est R.

Q22. Déterminer les valeurs propres de A.

Q23. Déterminer une matrice $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que la matrice $Q^{-1}AQ$ soit diagonale.

Partie D – Perturbation sur une matrice d'ordre 3

L'étude du système réduit aux trois planètes massives Jupiter, Saturne et Uranus fait en réalité intervenir une matrice dont on ne connaît que des valeurs approchées. Nous étudions dans cette partie l'influence de l'approximation effectuée sur le spectre de cette matrice.

Dans toute cette partie, a, b et c sont trois réels vérifiant $a < b < c$ et (u, v, w) est un élément de $(\mathbb{R}^*)^3$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ la transposée de M. On pose :

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = UU^\top.$$

On note D la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et on fixe $t \in \mathbb{R}^*$ pour toute cette partie. On pose $D(t) = D + tT$ et on considère l'équation (E_t) d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c} = \frac{1}{t}.$$

I – Solutions et spectre

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}$. On suppose que λ appartient au spectre de $D(t)$. On note X un vecteur propre de $D(t)$ associé à λ.

Q24. Montrer que : $\lambda I_3 - D \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $U^\top X = tU^\top(\lambda I_3 - D)^{-1}UU^\top X$.

Q25. Montrer que : $U^\top(\lambda I_3 - D)^{-1}U = \frac{1}{t}$.

Q26. En déduire que λ est une solution de l'équation (E_t).

Q27. Dresser le tableau de variations de la fonction numérique F suivante :

$$F : \lambda \longmapsto \frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c}.$$

En déduire que F s'annule en deux points ρ_1 et ρ_2 vérifiant $\rho_1 < \rho_2$.

AlgèBrille

Q28. Montrer que l'équation (E_t) admet trois solutions réelles distinctes $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ et $\lambda_3(t)$ vérifiant

$$\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t).$$

On comparera ces quantités à a, b, c, ρ_1 et ρ_2. On sera amené à distinguer les cas $t > 0$ et $t < 0$.

Q29. Montrer que l'ensemble des solutions de (E_t) et le spectre de $D(t)$ sont confondus.

II – Les limites

On note g_1 la réciproque de la restriction de F à $]-\infty, a[$, g_2 la réciproque de la restriction de F à $]a, b[$, g_3 la réciproque de la restriction de F à $]b, c[$ et enfin g_4 la réciproque de la restriction de F à $]c, +\infty[$.

Q30. Prouver l'existence de g_i pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, calculer $g_2(0)$ et déterminer la limite de g_2 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Q31. Exprimer $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ et $\lambda_3(t)$ en fonction de g_1, g_2, g_3, g_4 et de t. On sera amené à distinguer les cas $t > 0$ et $t < 0$.

Q32. Montrer que la fonction λ_1 se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On admet qu'il en est de même pour λ_2 et λ_3. On notera encore λ_1, λ_2 et λ_3 ces fonctions prolongées.

Q33. Montrer que la fonction λ_1, ainsi prolongée, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer la valeur de $\lambda_1'(0)$. On pourra s'appuyer sur l'expression de $F(\lambda_1(t))$. Donner, sans justification, les valeurs que l'on obtiendrait pour $\lambda_2'(0)$ et $\lambda_3'(0)$ en reprenant ce raisonnement.

Q34. Calculer la limite de λ_1 en $+\infty$ et $-\infty$. Quels commentaires peut-on faire quand on compare les valeurs propres de D et celles de $D(t)$?

∘ Fin ∘