Mathématiques 2

PC

2026

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

4 heures

Calculatrice autorisée

Notations et rappels

- Les lettres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs et celui des nombres réels.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
- On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ constitué des fonctions f pour lesquelles il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ si $|x| > A$:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists A > 0, \forall x \notin [-A, A],\ f(x) = 0\}.$$

On ne demande pas de vérifier que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un sous-epace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Le but de ce sujet est d'introduire les distributions. Après avoir construit une fonction test (partie A), on introduit les distributions (partie B). Les propriétés de dérivation et de convergence sont introduites dans les parties C et D. La partie E donne une application classique de la théorie des distributions et utilise les résultats des parties précédentes.

Partie A – Construction d'une fonction test

Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Q1. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Q2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}.$$

Q3. En déduire que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Q4. Soient $a < b$ deux réels. Construire une fonction $\psi_{a,b} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, telle que $\psi_{a,b}(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$ et $\psi_{a,b}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus]a, b[$.

Soit, pour $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{-1,1}(u)\mathrm{d}u} \psi_{-1,1}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$.

Q5. Justifier que ρ_ε est bien définie, puis que $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Q6. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x)\mathrm{d}x$.

Q7. Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) g(x)\,\mathrm{d}x = g(0).$$

(b) En déduire que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x-a) g(x)\,\mathrm{d}x = g(a).$$

horrible

Partie B – Distribution sur $\mathbb{R}$

Pour tout segment K inclus dans $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}(K)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ nulles en dehors de K :

$$\mathcal{D}(K) = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \forall x \notin K, f(x) = 0\}.$$

On appelle distribution sur $\mathbb{R}$ toute forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout segment $K \subset \mathbb{R}$, il existe un réel $C_K > 0$ et un entier $N_K \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(K), \quad |T(\varphi)| \leqslant C_K \max_{i \in [\![0, N_K]\!]} \|\varphi^{(i)}\|_\infty.$$

On note $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

Q8. Montrer que $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Q9. *Un premier exemple.* Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit l'application $\delta_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$.

Montrer que δ_a est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Q10. *Un second exemple.* Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Soit l'application

$$T_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Justifier que l'application T_f est bien définie, puis que T_f est une distribution sur $\mathbb{R}$.
On dit que T_f est la *distribution associée à f*.

Q11. Montrer que si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues telles que $T_{f_1} = T_{f_2}$, alors $f_1 = f_2$.

Q12. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit ψ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \varphi'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi'(tx)\,\mathrm{d}t$.

(b) En déduire que $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Q13. (a) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, justifier l'existence de la limite : $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right)$.

On note $V(\varphi)$ cette limite et on dispose ainsi d'une application V de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que V est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Partie C – Dérivation d'une distribution

Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit la forme linéaire T' sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad T'(\varphi) = -T(\varphi').$$

Q14. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On dit que T' est la distribution dérivée de la distribution T, ou simplement dérivée de T.
Si f est une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la distribution dérivée $(T_f)'$ de la distribution T_f associée à f (définie à la question **Q10**) pourra aussi être notée $T_f{}'$ ou T'_f.

Q15. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $T'_f = T_{f'}$.

Q16. Soit f la fonction valeur absolue : $f(x) = |x|$ pour tout réel x.

(a) Montrer que f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer la distribution dérivée T'_f de la distribution T_f.

Q17. Soit H la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Justifier que H est continue par morceaux et montrer que $T'_H = \delta_0$.
On rappelle que δ_0 a été défini à la question **Q9**.

Q18. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T' = 0$.

(a) Justifier que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $T(\varphi') = 0$.

(b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $T(\varphi) = 0$.

Indication : On pourra utiliser la fonction $\psi : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

(c) Justifier qu'il existe $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

(d) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que $T(\varphi) = T(\varphi_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Indication : Écrire $\varphi = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\varphi_0 + \left(\varphi - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\varphi_0\right)$.

(e) Conclure qu'il existe une fonction constante h sur $\mathbb{R}$ telle que $T = T_h$.

Q19. Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $T'_f = 0$.

Si $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la distribution dérivée seconde de T est par définition la distribution $T'' = (T')'$.
Si $T = T_f$, on note $(T_f)'' = T''_f$.

Q20. Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $T''_f = 0$.

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $T'_f = T_g$.

Q21. Justifier qu'il existe une fonction G définie sur $\mathbb{R}$ telle que $G' = g$.

Q22. En déduire que $(T_f - T_G)' = 0$.

Q23. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

Partie D – Suite de distributions

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions. On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une distribution T si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n\to+\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi).$$

On notera $\lim_{n\to+\infty} T_n \overset{\mathcal{D}}{=} T$.

Q24. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions qui converge vers une distribution T. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} T'_n \overset{\mathcal{D}}{=} T'$.

Q25. Donner un exemple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ et telle que la suite $(T_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la distribution nulle.

Q26. Soit f une fonction définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} T_{f_n} \overset{\mathcal{D}}{=} T_f$.

Pour la question **Q27**, on donne les définitions suivantes.

- Pour toute fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose :

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

- On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ converge en norme 2 vers une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si les fonctions $(f_n - f)^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.

Q27. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme 2 vers une fonction continue f. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{f_n} \overset{\mathcal{D}}{=} T_f$.

Indication : On pourra utiliser librement l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante : pour toutes fonctions continues par morceaux $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Partie E – Une application, le théorème d'unicité de Cantor

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels telles que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge pour tout réel x et est de somme nulle.

Q28. On souhaite montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0.

(a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. V

On suppose que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0.

(b) Montrer que pour tout réel $x \in [0, 2\pi]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n\sin(nx) = 0$. V

(c) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|b_{\varphi(n)}| \geqslant \varepsilon$.

(d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi(n)x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(e) Conclure.

Q29. On suppose dans cette question que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}|a_n|$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}|b_n|$ convergent.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = b_n = 0$.

Indication : Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pourra calculer

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\right)\sin(kx)\mathrm{d}x.$$

On revient au cas général et on ne suppose plus que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}|a_n|$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}|b_n|$ convergent.

Q30. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{a_n}{n^2}\cos(nx) + \dfrac{b_n}{n^2}\sin(nx)$.

Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note F sa somme.

Q31. En déterminant la distribution dérivée seconde de la distribution T_F, montrer que F est une fonction affine.

Q32. Montrer que F est bornée. En déduire que F est constante.

Q33. Montrer que F est nulle.

Q34. Conclure.