Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

PSI

2026

4 heures

Calculatrice autorisée

Polynômes de Jacobi

L'objectif de ce problème est de définir les polynômes de Jacobi et d'étudier quelques-unes des propriétés de ces polynômes.

La première partie de ce sujet est consacrée à la définition d'un produit scalaire sur l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Dans une deuxième partie, on se propose de démontrer la célèbre formule de Vandermonde sur les coefficients binomiaux et d'introduire la notion de coefficient binomial généralisé. Les troisième et quatrième parties proposent la définition des polynômes de Jacobi ainsi que certaines de leurs propriétés les plus classiques. Enfin, la cinquième partie permet de présenter les polynômes de Legendre, en tant que cas particulier des polynômes de Jacobi.

Partie A – Un produit scalaire

Soit $\delta \in \mathbb{R}$.

Q1. Rappeler sans démonstration la condition de convergence de $\int_0^1 \frac{1}{t^\delta} dt$ et donner sa valeur lorsqu'elle converge.

Q2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente une condition nécessaire et suffisante sur δ pour que l'intégrale $\int_0^a \frac{1}{(a-t)^\delta} dt$ converge.

Dans toute la suite de ce problème, sauf mention contraire, α et β désignent deux réels strictement supérieurs à -1.

Q3. Démontrer que, pour toute fonction f continue sur le segment $[-1,1]$, l'intégrale $\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta f(t) dt$ est convergente.

Q4. Pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P,Q \rangle = \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta P(t)Q(t) dt$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. On a donc : $\langle \lambda P, Q \rangle = \lambda \langle P, Q \rangle$

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\| = \sqrt{\langle P,P \rangle}$$

$\langle \lambda(P_1+P_2), p(Q_1+Q_2) \rangle =$

I – Un premier exemple

On suppose, dans cet exemple uniquement, que $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Le produit scalaire est donc ici défini par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ \langle P,Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$-\delta < 1$

Q5. Calculer le produit scalaire $\langle 1, X \rangle$.

$a - t = t$

Q6. Calculer les normes $\|1\|$ et $\|X\|$.

$a = 2t$ $\boxed{\delta > -1}$

II – Un second exemple

On suppose, dans cet exemple uniquement, que $\alpha = \beta = 0$. Le produit scalaire est donc ici défini par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2 \, , \, \langle P,Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

Q7. Calculer, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j$, le produit scalaire $\langle X^i, X^j \rangle$.

Q8. Calculer, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la norme $\|X^i\|$.

Partie B – Autour des coefficients binomiaux

Dans cette partie, complètement indépendante de la précédente, on se propose tout d'abord de démontrer la formule de Vandermonde :

$$\forall (k,m,p) \in \mathbb{N}^3 \, , \, k \leqslant m+p \, , \, \binom{m+p}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j} \binom{p}{j}$$

Q9. Démontrer cette formule. On pourra pour cela considérer $(m,p) \in \mathbb{N}^2$, $k \in [\![0, m+p]\!]$, $\mathcal{F}$ un ensemble constitué de $m+p$ éléments et on pourra partitionner judicieusement $\mathcal{F}$.

On introduit, dans toute la suite du problème, une nouvelle notation. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on pose :

$$B_\ell^\lambda = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-\ell+1)}{\ell!} & \text{si } \ell > 0 \\ 1 & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$

Par exemple : $B_3^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}-1\right) \times \left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \dfrac{1}{16}$.

Q10. Lorsque k et n sont deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$, comparer les deux nombres $\dbinom{n}{k}$ et B_k^n.

On admettra que la formule de Vandermonde précédemment démontrée se généralise aux coefficients B_ℓ^λ sous la forme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \, , \, k \leqslant s+t \, , \, B_k^{s+t} = \sum_{j=0}^{k} B_{k-j}^{s} B_j^{t}$$

Partie C – Une famille de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on note encore $\langle .,. \rangle$ la restriction à E du produit scalaire défini dans la question **Q4**.

L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire une base orthonormale $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E relativement à ce produit scalaire et vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall k \in [\![0,n]\!] \, , \, \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k) \\ (ii) & \forall k \in [\![0,n]\!] \, , \, \langle P_k, X^k \rangle > 0 \end{array}$$

I – Premières propriétés des P_k

Q11. Démontrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, le polynôme P_k est de degré k.

Q12. Démontrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, le polynôme P_k appartient à $\mathrm{Vect}\,(1, X, \dots, X^{k-1})^\perp$.

II – Une relation entre P_{k-1}, P_k et P_{k+1}

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Q14. Démontrer qu'il existe $a_k \in \mathbb{R}$ tel que $P_{k+1} - a_k X P_k$ soit de degré inférieur ou égal à k.

Q15. Démontrer qu'il existe $(b_k, c_k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P_{k+1} = (a_k X + b_k)P_k + c_k P_{k-1}$.

III – Racines des polynômes P_k

On considère $k \in [\![1, n]\!]$ et on s'intéresse aux racines de P_k. On note m le nombre de racines réelles de P_k qui se situent dans l'intervalle $]-1,1[$, comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité. On désigne par $\mathcal{R} = \{x_1, \dots, x_m\}$ l'ensemble, éventuellement vide, constitué par ces racines.

Q16. Quelle inégalité relie k et m ?

Q17. On considère le polynôme $S = (X - x_1)(X - x_2)\dots(X - x_m)$ si $m \geqslant 1$ et $S = 1$ si $\mathcal{R} = \emptyset$.
Que peut-on dire du signe de la fonction polynomiale $x \mapsto P_k(x)S(x)$ sur $]-1,1[$?

Q18. En déduire que $\langle P_k, S\rangle \neq 0$.

Q19. Que peut-on conclure sur m ?

Partie D – Polynômes de Jacobi

Dans cette partie, on se place à nouveau dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on continue de noter $\langle .,. \rangle$ la restriction à E du produit scalaire défini dans la question **Q4**.

$a^{1,5} = 1{,}5\, a^{0,5}$

I – Définition

On pose, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$g_k(x) = (1-x)^{\alpha+k}(1+x)^{\beta+k} \qquad \text{et} \qquad J_k(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} g_k^{(k)}(x)$$

Q20. Donner l'expression de g_0 et g_1. En déduire l'expression de J_0 et J_1.

Q21. Soient $p \in \mathbb{N}$ et j un nombre réel, pas nécessairement entier. Déterminer l'expression de la dérivée p-ième de la fonction $x \mapsto (1-x)^j$ sur $]-1,1[$ en utilisant la notation B_p^j.

Q22. En déduire une expression de $g_k^{(k)}(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Q23. Démontrer alors que, pour $k \geqslant 2$:

$$\forall x \in]-1,1[,\ J_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{k} B_{k-i}^{k+\alpha} B_i^{k+\beta} (x-1)^i (x+1)^{k-i}$$

Q24. Démontrer que la fonction J_k est polynomiale de degré k et proposer une expression simple de son coefficient dominant à l'aide de la formule de Vandermonde.

Les polynômes J_k associés aux fonctions polynomiales $x \mapsto J_k(x)$ sont appelés *polynômes de Jacobi*. Nous allons en étudier une propriété fondamentale

II – Orthogonalité des polynômes de Jacobi

Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $i \in [\![0, k-1]\!]$.

Q25. Démontrer la convergence des deux intégrales $\int_{-1}^{1} x^i g_k^{(k)}(x)dx$ et $\int_{-1}^{1} x^{i-1} g_k^{(k-1)}(x)dx$ puis prouver que :

$$\int_{-1}^{1} x^i g_k^{(k)}(x)dx = -i \int_{-1}^{1} x^{i-1} g_k^{(k-1)}(x)dx$$

Q26. En déduire que $\langle J_k, X^i \rangle = 0$.

Q27. Démontrer que la famille $(J_0, J_1, \dots, J_n)$ est une base orthogonale de E.

Q28. Expliquer, sans faire les calculs, comment il serait possible d'en déduire une base orthonormale de E.

Partie E – Le cas particulier $(\alpha, \beta) = (0, 0)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette partie, on se place, comme dans l'exemple des questions **7** et **8**, dans le cas où $\alpha = \beta = 0$. On rappelle que le produit scalaire est alors donné par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2 \, , \, \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

Nous admettrons alors que la base orthonormale obtenue dans la question **28** vérifie toutes les hypothèses de la famille de polynômes étudiée dans la **partie C**. Ces polynômes sont appelés *Polynômes de Legendre*, et à ce titre notés L_k. Ils sont donc donnés par la formule suivante :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \, , \, L_k = \frac{1}{2^k k!} \left[(X^2 - 1)^k \right]^{(k)}$$

I – Premières propriétés des polynômes L_k

Q29. Calculer L_k pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$.

Q30. Calculer les racines des polynômes L_k pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$ et vérifier, dans ces cas particuliers, la conclusion de la question **19**.

Q31. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, retrouver le degré de L_k sans utiliser les résultats de la partie C, puis calculer le coefficient dominant de L_k.

Q32. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer la parité des polynômes L_k.

Q33. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $L_k(1)$ et $L_k(-1)$.

II – Une équation différentielle vérifiée par les L_k

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On reprend la définition de la fonction g_k qui est ici donnée par :

$$\forall x \in]-1, 1[\, , \, g_k(x) = (1 - x^2)^k$$

Q34. Exprimer, pour tout $x \in]-1, 1[$, la quantité $(1 - x^2) g_k'(x)$ à l'aide de $g_k(x)$.

Q35. En déduire, à l'aide de la formule de Leibniz, que le polynôme L_k est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + k(k + 1)y = 0$$

III – Une majoration des L_k sur $[-1, 1]$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

Q36. Étudier la monotonie sur $[0, 1]$ de la fonction f_k définie par :

$$\forall x \in [0, 1] \, , \, f_k(x) = (L_k(x))^2 + \frac{1 - x^2}{k(k+1)} \left(L_k'(x) \right)^2$$

Q37. En déduire la ...

IV – Relation entre L_{k-1}, L_k et L_{k+1}

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. L'objectif de sous-partie est de préciser le résultat des questions **14** et **15** dans le cas des polynômes de Legendre.

Q38. En reprenant les notations de la question **14**, déterminer l'expression de a_k.

Q39. Démontrer que : $L_{k+1} = \dfrac{2k+1}{k+1} X L_k - \dfrac{k}{k+1} L_{k-1}$.

V – Un developpement en série entière faisant intervenir les L_k

Les polynômes L_k ont été définis pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. On pourrait démontrer qu'il est possible d'étendre leur définition afin de disposer de L_k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On suppose que toutes les propriétés précédemment démontrées, notamment l'égalité de la question **39**, restent valables.

Considérons un réel $x \in [-1, 1]$ et intéressons-nous à la série entière $\sum\limits_{k \geqslant 0} L_k(x) t^k$.

Q40. Démontrer que le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à 1. On pose, pour tout $t \in]-1, 1[$:

$$S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} L_k(x) t^k$$

Q41. Établir, grâce à la question **39**, que :

$$\forall t \in]-1, 1[, \ (1 - 2tx + t^2) S'(t) + (t - x) S(t) = 0$$

Q42. En déduire que :

$$\forall t \in]-1, 1[, \ \sum_{k=0}^{+\infty} L_k(x) t^k = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}$$

◇ Fin ◇

$\dfrac{120}{C,8}$

$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{2i} = 1 + k x^2 + \binom{k}{2} x \ldots$

$+ x^{2k}$

2^k

$(x^{2k})' = 2k x^{2k-1}$

$= 4k(k-1)$

$2k-1$