

SESSION 2026

CONCOURS G2E  
**MATHÉMATIQUES**

Durée : 4 heures

---

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont interdites.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas si nécessaire.

La rédaction se fera uniquement à l'encre bleue ou noire.

Attention, sont strictement interdits :

- L'utilisation du blanc correcteur sous forme liquide, souris ou autre et effaceur.
  - Les découpages et collages sur la copie.
  - Les téléphones portables, "smartphones", les montres (connectées ou non), les chronomètres et les réveils.
  - L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document.
- 

**PROBLÈME 1**

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal du plan.

En partie A, on calcule une intégrale à l'aide de deux fonctions intermédiaires. L'une d'entre elles est définie à partir de la fonction arctan qui est, rappelons-le, la bijection réciproque de  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Par exemple  $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ .

En partie B, on s'intéresse au dénombrement des points à coordonnées entières dans un disque. Ce dénombrement utilise la partie entière d'un réel  $t$  qui est classiquement notée  $[t]$ , cette dernière est caractérisée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} [t] \in \mathbb{Z} \\ [t] \leq t < [t] + 1 \end{cases}$$

Enfin, la partie C est consacrée à des variables aléatoires discrètes dont on étudie des phénomènes de convergence.

**Partie A : Calcul d'une intégrale à l'aide de deux fonctions intermédiaires**

1. On considère les deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  définies sur  $[1, +\infty[$  par :

$$\varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \psi(t) = \frac{t}{t^2 + 1} + \arctan(t).$$

- (a) Justifier que  $\varphi$  et  $\psi$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$  et calculer leurs dérivées.  
 (b) En déduire le sens de variation de  $\varphi$  et déterminer ses limites en 1 et en  $+\infty$ .
2. On note  $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  et on cherche à calculer l'intégrale  $I$  définie ci-dessous à l'aide des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  :

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

- (a) À l'aide du changement de variable  $x = \varphi(t)$  (on détaillera avec soin les hypothèses relatives à ce changement de variable), montrer que :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{8t^2}{(t^2+1)^3} dt.$$

- (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I = \frac{1}{2} + 2 \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

- (c) En déduire que :

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

3. Dans cette question on cherche à retrouver  $I$  par une méthode géométrique.

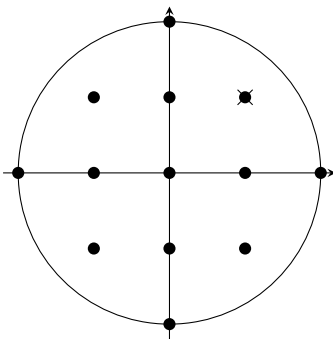
- (a) Donner l'équation cartésienne du cercle  $\mathcal{C}$  de centre l'origine du repère et de rayon 1 et montrer que tout point de la courbe représentative de  $f$  appartient à  $\mathcal{C}$ .  
 (b) Retrouver la valeur de  $I$  à l'aide de  $\mathcal{C}$ .

### Partie B : Dénombrement de points dans un disque

On s'intéresse aux points à coordonnées entières dans le disque de centre l'origine et de rayon  $n \in \mathbb{N}^*$  et on note :

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad x^2 + y^2 \leq n^2\}, \quad Q_n = \{(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad x^2 + y^2 \leq n^2\}.$$

Par exemple, la figure ci-dessous représente les points de  $D_2$  et l'unique point de  $Q_2$  :



$$D_2 = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, -1), (1, -1), (2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2)\}$$

$$Q_2 = \{(1, 1)\}$$

4. Déterminer les cardinaux des ensembles  $D_1$ ,  $Q_1$  et  $Q_3$ .  
 5. (a) En raisonnant par symétrie, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Card}(D_n) = 1 + 4n + 4 \text{Card}(Q_n).$$

- (b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Card}(Q_n) = \sum_{x=1}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \rfloor.$$

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - n + \sum_{x=1}^n \sqrt{n^2 - x^2} \leq \text{Card}(Q_n) \leq \sum_{x=1}^n \sqrt{n^2 - x^2}.$$

6. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_n = \frac{1}{n^2} \sum_{x=1}^n \sqrt{n^2 - x^2}.$$

- (a) Démontrer que  $R_n$  est une somme de Riemann d'une fonction à préciser sur un segment à préciser également.
- (b) En déduire que  $(R_n)$  converge et préciser sa limite.
- (c) En déduire enfin un équivalent de  $\text{Card}(Q_n)$  (le plus simple possible) et justifier que :

$$\text{Card}(D_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \pi n^2.$$

### Partie C : Convergence en loi

Dans cette partie on considère un ensemble  $\Omega$  et une tribu  $\mathcal{T}$  sur  $\Omega$ . Toutes les variables aléatoires présentées dans cette partie sont définies sur  $(\Omega, \mathcal{T})$ .

On note  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites de variables aléatoires telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  et  $Y_n$  suivent toutes les deux la même loi uniforme sur  $[-n, n]$ . On suppose de plus que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $(X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_N)$  sont mutuellement indépendantes.

On pose également la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \Omega, \quad Z_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n^2(\omega) + Y_n^2(\omega) \leq n^2 \\ 0 & \text{si } X_n^2(\omega) + Y_n^2(\omega) > n^2 \end{cases}.$$

- 7. (a) Calculer l'espérance de  $X_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- (b) Démontrer que :
 
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V(X_n) = \frac{n(n+1)}{3}.$$
- 8. (a) Montrer que les variables aléatoires  $(Z_n)$  sont mutuellement indépendantes.
- (b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Z_n$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{\text{Card}(D_n)}{(2n+1)^2}$ .
- 9. (a) Rappeler la caractérisation de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  vers une variable aléatoire limite.
- (b) Montrer que  $(Z_n)$  converge en loi vers une variable aléatoire limite  $Z$  dont on précisera les caractéristiques usuelles (loi, espérance, variance).
- 10. Dans cette dernière question on admet le théorème de Cesàro qui stipule que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite réelle convergente vers  $\ell \in \mathbb{R}$  alors  $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge également vers  $\ell$ .
  - (a) Démontrer que l'espérance de la moyenne empirique de  $(Z_1, \dots, Z_n)$  converge et donner sa limite.
  - (b) Démontrer également que la variance de la moyenne empirique de  $(Z_1, \dots, Z_n)$  converge et donner sa limite.

## PROBLÈME 2

En partie A de ce deuxième problème, on s'intéresse aux matrices dont le carré est égal à la matrice nulle. En particulier on montre que toute valeur propre d'une telle matrice est nulle. On étudie ensuite le cas des matrices  $2 \times 2$  de carré nul.

En partie B, on cherche à réduire tout endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont le carré est nul (cette partie est toutefois largement indépendante de la partie A puisqu'elle n'utilise que le résultat relatif à la valeur propre nulle).

La partie C est quant à elle consacrée à des calculs élémentaires de probabilités.

### Partie A : Matrice de carré nul

On s'intéresse aux matrices dont le carré est nul c'est-à-dire aux matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que :

$$A^2 = O_n.$$

1. (a) Déterminer, sans justifier, quelles matrices sont de carré nul parmi les matrices ci-dessous :

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 16 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont le carré est nul alors  $\lambda = 0$ .

(c) Montrer que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique dont le carré est nul alors  $A = O_n$ .

2. Dans cette question, on considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle qu'il existe  $m \in \{1, 2, 3\}$  tel que :

$$A^m = O_2.$$

On veut montrer que, dans ce cas,  $A$  est encore de carré nul.

(a) Montrer que si  $m < 3$  alors  $A$  est de carré nul.

(b) Dans le cas où  $m = 3$ , on raisonne par l'absurde. On suppose donc que  $A^2 \neq O_2$ . Justifier qu'il existe  $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que  $A^2 X \neq 0$ .

(c) Montrer alors que  $(X, AX, A^2X)$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  et aboutir à une contradiction puis conclure.

3. Dédurre de ce qui précède que si  $M$  et  $N$  sont deux matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $MN$  est de carré nul, alors  $NM$  est aussi de carré nul.

### Partie B : Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de carré nul

Dans cette partie, on fixe un endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^3$  de carré nul, c'est-à-dire que  $u^2$  est l'endomorphisme nul.

L'objectif de cette partie est de montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Commencer par traiter le cas où  $u = 0$ .

5. Dorénavant on suppose que  $u \neq 0$ .

- (a) Démontrer qu'il existe un vecteur  $a \in \mathbb{R}^3$  tel que  $(u(a), a)$  est une famille libre.
- (b) Pourquoi existe-t-il un vecteur  $e \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\mathcal{A} = (u(a), a, e)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ ?
- (c) Les coordonnées d'un vecteur quelconque  $x \in \mathbb{R}^3$  dans  $\mathcal{A}$  sont notées  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad x = x_1 u(a) + x_2 a + x_3 e.$$

Déterminer  $a_1$  et  $u(a)_1$ .

6. On considère la fonction  $\varphi$  ci-dessous et on admet que  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x_1, u(x)_1). \end{aligned}$$

- (a) Montrer que  $\text{rg}(\varphi) = 2$  et en déduire que  $\text{Ker}(\varphi)$  est une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Soit  $e' \in \mathbb{R}^3$  un vecteur directeur de  $\text{Ker}(\varphi)$ . Montrer que  $\mathcal{B} = (u(a), e', a)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (c) Montrer que  $u(e') \in \text{Ker}(\varphi)$ , en déduire que  $u(e') = 0$ .
- (d) Conclure.

### Partie C : Avec un dé

Un enfant dispose d'un dé parfaitement équilibré à six faces. Il s'amuse à le lancer jusqu'à obtenir six fois la face 6.

Sa grand-mère, passionnée de probabilités, modélise cette expérience aléatoire par un espace  $(\Omega, \mathcal{T})$  et elle note pour tout  $\omega \in \Omega$  :

- $X_1(\omega)$  est le nombre de lancer(s) avant le premier six.
- $X_2(\omega)$  est le nombre de lancer(s) entre le premier six et le deuxième six.
- $X_3(\omega)$  est le nombre de lancer(s) entre le deuxième six et le troisième six.
- $X_4(\omega)$  est le nombre de lancer(s) entre le troisième six et le quatrième six.
- $X_5(\omega)$  est le nombre de lancer(s) entre le quatrième six et le cinquième six.
- $X_6(\omega)$  est le nombre de lancer(s) entre le cinquième six et le dernier six.

Par exemple si la liste des faces obtenues par cet enfant est 1, 6, 3, 4, 5, 6, 1, 6, 2, 3, 6, 6, 1, 5, 3, 6 alors  $X_1$  prend la valeur 1,  $X_2$  prend la valeur 3,  $X_3$  prend la valeur 1,  $X_4$  prend la valeur 2,  $X_5$  prend la valeur 0 et  $X_6$  prend la valeur 3.

- 7. (a) À l'aide d'une variable suivant une loi géométrique, calculer  $P(X_1 = n)$  pour tout  $n \in X_1(\Omega)$  puis calculer l'espérance et la variance de  $X_1$ .
- (b) Que dire des variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$  (justifier succinctement votre réponse)?
- 8. (a) Calculer  $P(X_1 = X_4 = X_6 = 0)$ .
- (b) Calculer  $P(X_2 = 0 \cup X_5 = 0)$ .
- 9. La grand-mère poursuit et pose :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad A(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) & X_3(\omega) \\ 0 & X_4(\omega) & X_5(\omega) \\ 0 & 0 & X_6(\omega) \end{pmatrix}.$$

Calculer la probabilité que  $A(\omega)$  soit de carré nul.