concours
Geipi Polytech

Epreuves du mardi 28 avril 2026

Ce livret contient les énoncés des sujets et 6 feuilles « document réponses ».

Sujets à traiter
Vous devez obligatoirement :
- ✓ **Traiter le QCM de Mathématiques**
- ✓ **Choisir et traiter 2 sujets au choix parmi les spécialités suivantes :**
  - Mathématiques
  - Physique-Chimie
  - Sciences de la Vie et de la Terre/Biologie-écologie
  - Numérique et Sciences Informatiques
  - Sciences de l'Ingénieur

Gestion du temps
Nous vous conseillons de répartir votre temps comme suit :
- 1 heure pour le QCM de Mathématiques
- 2 heures pour les 2 sujets de spécialité choisis (1h par sujet)

Consignes importantes
- ✓ **Lire et appliquer** les consignes listées sur les documents réponses
- ✓ **Ecrire vos réponses** dans les cadres prévus à cet effet
- ✓ **Traiter tous les exercices** des sujets choisis.

Interdictions
- × **L'usage d'une calculatrice**, d'un téléphone ou de tout objet communicant est interdit.
- × **Aucun document** n'est autorisé.

Pour chaque **Exercice**, *plusieurs affirmations sont proposées. Pour chaque affirmation, vous direz si elle est vraie ou fausse en cochant la réponse choisie sur la feuille de réponses.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse sera pénalisée par des points négatifs.
Pour chaque exercice, le total des points obtenu ne peut être strictement négatif.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.
Les exercices sont tous indépendants.

Première partie – Calculs

Exercice I

I-A- $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$.

I-B- $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = \sqrt{3} - 2$.

I-C- Pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{2\times 2^n} - \frac{1}{4^n} = 0$.

I-D- $\frac{2026^2}{2025^2+2027^2-2} = \frac{1}{2}$.

Exercice II

II-A- Pour tout réel x, $-(6x+5)(6x-7) + 36x^2 - 25 = 2(6x+5)$.

II-B- L'ensemble des solutions de l'inéquation $-2e^{2x+1} \leq -2e^5$ est $]-\infty; 2]$.

II-C- Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x^3 + x^2) = \ln(x^2) \times \ln(x^3)$.

II-D- Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x^3 + x^2) = 2\ln(x) + \ln(x+1)$.

II-E- Pour tous réels a et b, $\frac{e^a + e^b}{e^{a+b}} = e^{-a} + e^{-b}$.

Exercice III

Soit a un nombre réel. On considère l'équation $(E) : x^2 = a^2$, d'inconnue réelle x.

III-A- Si le nombre réel a est strictement négatif, alors l'équation (E) n'a pas de solution.

III-B- Pour tout nombre réel a, l'équation (E) admet a comme unique solution.

III-C- Il existe une unique valeur de a pour laquelle l'équation (E) admet une unique solution.

Deuxième partie – Fonctions à valeurs réelles

Exercice IV

Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

IV-A- Si C_f admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -1$, alors l'équation $f(x) = -1$ n'a pas de solution.

IV-B- Si C_f admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -1$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

IV-C- Si C_f admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -1$, alors $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$.

Exercice V

Soient f la fonction définie pour tout réel x différent de 1 par $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

V-A- C_f admet une asymptote d'équation $x = 0$.

V-B- f est croissante sur $]1\ ;\ +\infty[$.

V-C- La fonction F définie par $F(x) = \frac{-1}{1-x}$ est une primitive de f sur $]1\ ;\ +\infty[$.

Troisième partie – Suites numériques

Exercice VI

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$.

VI-A- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

VI-B- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

VI-C- $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

VI-D- $\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Quatrième partie – Probabilités

Exercice VII

VII-A- On effectue quatre lancers d'une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir une seule fois face est égale à $\frac{3}{4}$.

Exercice VIII

VIII-A- On tire au hasard successivement et sans remise deux cartes dans un jeu de 32 cartes comportant 16 cartes rouges et 16 cartes noires. Si X est la variable aléatoire correspondant au nombre de cartes noires parmi les deux tirées, alors X suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$.

Cinquième partie – Géométrie dans le plan

Exercice IX

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives : $A(1\ ;\ -1)$, $B(-2\ ;\ 5)$ et $C(3\ ;\ 5)$. $D(x_D\ ;\ y_D)$

IX-A- Une équation de la droite (AB) est $2x + y - 1 = 0$.

IX-B- Une équation de la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à (AB) passant par C est $x - 2y + 7 = 0$.

VII-C- Le point d'intersection I de la droite (AB) avec la droite $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $I(-1\ ;3)$.

$\vec{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Mathématiques Spécialité - EXERCICE I (24 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $A(2\,;-1\,;-1)$ et la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est donné par :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = -1+t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

x_m

Pour tout nombre réel t, on note M_t le point de la droite $\mathcal{D}$, de coordonnées $(1+t\,;2t\,;-1+t)$.

Le but de cet exercice est de déterminer la distance ℓ entre le point A et la droite $\mathcal{D}$ par trois méthodes différentes.

Questions préliminaires

I-1- Justifier que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

I-2- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Première méthode

$A \in P$ $\qquad P \perp D$

I-3- On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$. Justifier la réponse.

I-4- Déterminer les coordonnées de B, point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$. Justifier la réponse.

I-5- Calculer AB^2. Justifier la réponse. On exprimera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$\vec{u}\,(1\,;2\,;1)$ $\quad 2^2 + 1^2 + 1^2 = \sqrt{6}$

Partie B – Deuxième méthode

I-6- On considère la fonction f définie pour tout réel t par $f(t) = AM_t^{\ 2}$.

Déterminer les réels a, b et c tels que $f(t) = at^2 + bt + c$. Aucune justification n'est attendue.

I-7-a- Compléter le tableau des variations de la fonction f. Les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ne sont pas attendues. Aucune justification n'est attendue.

I-7-b- Compléter avec les termes qui conviennent : « La fonction f admet un minimum/maximum en ... qui vaut ... . »

Partie C – Troisième méthode

On considère le point $M_0(1\,;0\,;-1)$ de la droite $\mathcal{D}$. $\quad \overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$

I-8-a- Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM_0}$. Aucune justification n'est attendue.

I-8-b- Donner la longueur AM_0. Aucune justification n'est attendue.

On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$. $\quad H = M_0 \quad \|\vec{u}\|^2 = \overrightarrow{AM_0} \times \vec{u}$

I-9- Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HM_0} = k\vec{u}$. $\quad \overrightarrow{HM_0} \times \vec{u}$

I-10-a- Justifier l'égalité : $k = \frac{\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$. <u>*On pourra admettre ce résultat pour la suite de l'exercice.*</u>

I-10-b- En déduire la valeur de k.

I-10-c- En déduire la longueur HM_0. Aucune justification n'est attendue.

I-11- En déduire AH^2. Justifier la réponse. On exprimera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$HM_0 = k\,\vec{u} = \frac{1}{6} \times \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Conclusion

I-12- En déduire la valeur de ℓ. Aucune justification n'est attendue.

Mathématiques Spécialité - EXERCICE II (6 points)

On réalise un test de dépistage d'une maladie dans un élevage de bovins. Lors d'un test :

- la probabilité qu'un test réalisé sur animal malade soit positif est égale à $\frac{9}{10}$; ~~$P(T) = \frac{9}{10}$~~ $P_M(M \cap T) = \frac{9}{10}$
- la probabilité qu'un test réalisé sur animal non malade soit négatif est égale à $\frac{4}{5}$.

$P_{\bar{M}}(\bar{T}) = \frac{4}{5}$

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tester un animal de l'exploitation.

On note M l'événement : « l'animal est atteint par la maladie ». On considère que, dans l'élevage où est réalisé ce dépistage, $P(M) = \frac{1}{4}$.

On rappelle que, pour tout événement noté A, l'événement noté $\bar{A}$ est son contraire.

On donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

On choisit au hasard un animal de l'exploitation et on effectue un test. On note T l'événement : « le test est positif ».

II-1 - Donner $P_M(T)$, $P_M(\bar{T})$, $P_{\bar{M}}(T)$ et $P_{\bar{M}}(\bar{T})$.

II-2- Montrer que $P(T) = \frac{3}{8}$. Justifier et détailler le calcul.

II-3- Calculer $P_T(M)$. Justifier et détailler le calcul.

Mathématiques Spécialité – EXERCICE III (10 points)

On cherche à déterminer toutes les fonctions f vérifiant les conditions suivantes :

$$\mathcal{P}\begin{cases} \bullet \quad \text{la fonction } f \text{ est définie, dérivable et ne s'annule pas sur } \mathbb{R} \text{ ;} \\ \bullet \quad f(0) = \frac{1}{2} \text{ ;} \\ \bullet \quad \text{pour tout nombre réel } x,\ f'(x) = (f(x))^2 - f(x). \end{cases}$$

$= f(x)(f(x) - 1)$

Le but de cet exercice est de démontrer que le problème $\mathcal{P}$ admet une unique solution.

III-1- On suppose que f est une fonction solution du problème $\mathcal{P}$. Soit h la fonction définie pour tout nombre réel x par : $h(x) = \left(\frac{1}{f(x)} - 1\right)e^{-x}$.

III-1-a- Donner $h(0)$. Le détail des calculs n'est pas attendu.

III-1-b- Montrer que, pour tout nombre réel x, $h'(x) = 0$. Détailler les calculs.

III-1-c- Que peut-on en déduire pour la fonction h ? Aucune justification n'est attendue.

III-1-d- En déduire que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$. Justifier la réponse.

III-2- Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ est bien solution du problème $\mathcal{P}$.

$h(0) = \cancel{1}(2-1)e^0$

$= 1$

$h'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$